GAMMA
setembro 2005

ÁREAS Y TRIÁNGULOS: CREANDO TEOREMAS

Manuel Díaz Regueiro

Resumen

Se trata de crear múltiples "teoremas" respecto al triángulo utilizando Derive, u otra herramienta de cálculo simbólico. De un sólo nuevo tipo de problemas. Dado un triángulo, creamos otro (por alguna regla) y buscamos si la razón de las áreas de los dos triángulos es independiente del triángulo original. La tesis es que lo pueden hacer los alumnos si usan... tecnología.

Abstract

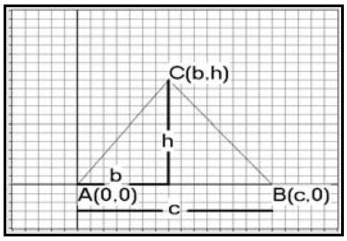
I try to create several "theorems" about the triangle, using Derive, or another tool of symbolic algebra. Of an new unique type of problems. Given an triangle, we create another derivated (by some rule) and we search if the reason of areas of the two triangles is independent of the original triangle. The thesis is that the pupils can do it using… technology.

Este es un artículo que tiene mucho que ocultar[1] porque el número de resultados es ya quizás excesivo y los medios que se usan son impresentables (en el sentido de número excesivo de páginas resultado de cálculos en programas de cálculo simbólico como *Derive*).

El campo de la geometría del triángulo fue un campo fértil en el XIX, aún que Jacob Steiner consideraba la geometría analítica una "muleta para espíritus menos dotados". Hoy es una curiosidad de la que se dan algunas nociones en Secundaria, y algunos ejercicios con la Geometría Analítica.

Lo que se presenta es un trabajo del que aborrecería Steiner, ya que no sólo usa las muletas de esa geometría, sino que usa las muletas del cálculo simbólico. Pero, en conjunto, y en la mayoría de los resultados, no existiría este artículo sin esas muletas. La capacidad humana, y aún la de Steiner lo fue, es limitada. Los cálculos que llevan a intuiciones son muy limitados si no usamos las posibilidades tecnológicas de las que actualmente disponemos.

Algunas maneras de construir un triángulo en función de otro dado



Queremos calcular un triángulo *A'B'C'* en función de uno dado *ABC* siguiendo unas reglas. Veamos ejemplos.

1. (1a) Trazar las paralelas a los lados por los vértices. Los puntos de corte nos darán el triángulo transformado.

(1b) Unir los puntos medios de los lados. El triángulo transformado tiene esos vértices.

(1c) Trazar as perpendiculares a los lados por los vértices opuestos. Los puntos de corte conformarán el triángulo transformado.

(1d) Por homotecia o semejanza de triángulos. Sabemos en este caso que la razón de las áreas es k^2, siendo k la razón de semejanza.

[1] Como decía Gauss después de construir hay que retirar los andamios. En este caso los andamios, los listados de *Derive*, son 100 veces el edificio, no dejarían ver el bosque ni el edificio. De hecho, es posible que el artículo tenga algún error dado ese efecto "bosque".

2. Dados tríos de puntos especiales:

(2a) Puntos de corte de las alturas con el lado opuesto a cada vértice (triángulo órtico). Es el mismo que (1c).

(2b) Puntos de corte de las tres bisectrices de un ángulo con el lado opuesto a ese ángulo.

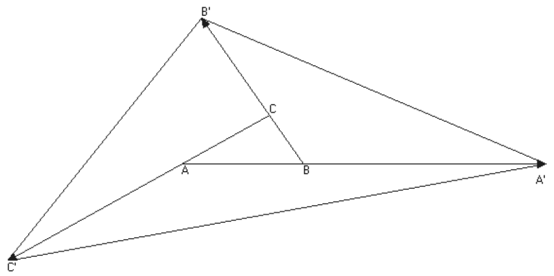
(2c) Puntos dados por el triángulo de Morley.

(2d) Puntos de corte de tres cevianas.

...

3. Transformaciones de los vértices a través de vértices.

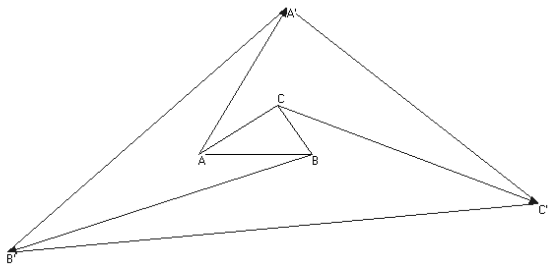
(3a) Llamo triángulo *n*-simétrico de otro a aquel en que cada vértice (*A*) se transforma en el punto, A', que cumple que AA'=nAB. Cuando hablemos de simétricos podemos entender, de modo general, *n*-simétricos.



n-simetría de un triángulo, en este caso, *n* = 3, *R* = 19 (S(*A'B'C'*)=19·S(*A*,*B*,*C*)).

(3b) Sólo transformamos así dos (o un) vértices y el tercero queda sin transformar.

(3c) n1-simétricos AA'=nOB-OA.



Transformación simétrica con *m* = -1, *n* = -2, *p* = 3. *R* = 21.

(3d)Transformado combinación lineal OA'=OB+nAB+mBC.

(3e) Simétrica OA'=mOA+nOB+pOC.

(3f) n2-simétricos AA'=nBA.

(3g) np1-simetrico OA'=nOB-pOA.

(3h) np-simétrico OA'=(n+p)OB-nOA.

...

4. Dado un punto cualquiera...

(4a) Puntos simétricos del punto respecto a los vértices ABC.

(4b) Simétricos de los vértices respecto al punto.

(4c) Simétricos respecto a los lados.

(4d) Corte perpendicular con los lados.

(4e) Paralelas desde el punto a los lados (y puntos de corte con otro de los lados). Aquí aparecen varias posibilidades y varias maneras de obtener un transformado. De todas formas podemos entender que la manera canónica es hacer sempre la recta paralela siguiendo el mismo orden y de modo simétrico respecto a los lados.

Notación que usaremos de aquí en adelante

Vamos a aprovechar estos ejemplos y denominar las transformaciones por el orden en que están descritas, así la (3a) es *n*-simétrico...

Sin perder generalidad podemos suponer que A está en el origen de coordenadas, B en el punto (c,0) y C en el punto (b,h). Esto facilita que las expresiones algebraicas resultantes sean más sencillas. Partimos, por lo tanto, para simplificar los cálculos, de suponer A(0,0), B(c,0) y C(b,h) (aquí b no tiene que ver con la medida del lado b; c si que es la medida del lado c). h es la altura desde C. El Área(A,B,C) = ch/2, si bien en las razones omitiremos el "2" común a las áreas y dividiremos simplemente por ch.

El objetivo

Todo esto está muy bien, pero que queremos hacer?... Queremos hallar la razón de las áreas del triángulo transformado al original... R = S(A'B'C')/S(ABC).

Dicho así no resulta muy interesante, y es una pregunta demasiado abierta, pero es que en realidad buscamos...

Teoremas *exactos* y *express*

Que la razón sea un número, independiente por lo tanto de los puntos originales ABC. ¿Hay precedentes? En la transformación (1a) todos sabemos que es 4 y en la (1b), R=1/4. En la (1d), $R=k^2$ (en general, R=determinante de la transformación afín). Si para una transformación dada no existe ese número podemos buscar que pasa si el triángulo original es a) rectángulo, b) isósceles, c) equilátero. Si en estos casos R es un número también nos interesa...

Por que *express*? Porque lo que obtendremos a través de la geometría analítica y el cálculo simbólico es ese número. Si el resultado es un número ya estará demostrado que no depende del triángulo original... Observaremos que al calcular el determinante de la área de A'B'C' resulta *número*·ch. Entonces, R = *número*.

Composición de transformacións

Ademais tenemos una ayuda para multiplicar los resultados que viene dada por esta proposición:

Las transformaciones admiten la composición de aplicaciones usual, pero además, si son *exactas* en el sentido anterior su composición dará lugar a otra transformación *exacta*, ya que

$$R_{T_1 o T_2} = \frac{S_{T_1 o T_2}}{SO} = \frac{S_{T_1 o T_2}}{S_{T_2}} \frac{S_{T_2}}{SO}$$

donde SO es el área del triángulo original ABC, S_{T_2} es el área del triángulo transformado por T_2 y $S_{T_1 \circ T_2}$ es el área del transformado por la composición de T_1 y T_2.

Ahora bien, T_1 es *exacta* así que aplicada a cualquier triángulo la razón es siempre la misma por lo que

$$R_{T_1} = \frac{S_{T_1}}{SO} = \frac{S_{T_1 \circ T_2}}{S_{T_2}}$$

es el primer factor y obtenemos $R_{T_1 \circ T_2} = R_{T_1} * R_{T_2}$ La composición de T_1 y T_2 es *exacta* y además sabemos que su razón es el producto de las razones... La inversa de T, de razón R, es *exacta* y tiene razón 1/R. Forman grupo. El elemento neutro es la identidad.

Incluso más ayuda... hay **resultados generales, para cualquier punto P(x,y)...**

(I) Dado un punto cualquiera del plano si calculamos los simétricos de ese punto respecto a los puntos medios de los lados del triángulo la razón resultante es R=1/4. *n*-simétricos, $R = (n-1)^2/4$. n1-simétricos R=1/4.

(II) Dado un punto cualquiera del plano si calculamos los simétricos de los puntos medios de los lados del triángulo respecto a ese punto la razón es R=1. *n*-simétricos, $R = n^2/4$. n1-simétricos $R = n^2/4$.

(III) Simétricos respecto a los vértices del triángulo órtico, si ABC es rectángulo:

$$R = -(x^2-xc-y(h-y))/(c^2+h^2)$$

(IV) Simétrico respecto a los vértices de ese punto R=4. *n*-simétricos $R=n^2$. n1-simétricos $R= n^2$ (en la tabla este caso será G_{IV}).

(V) Simétricos de los vértices con centro ese punto R=1 (en la tabla este caso será G_V). *n*-Simétricos $R=(n-1)^2$ (si además hacemos C'=A, $R=n(n-1)$). n1-simétricos R=1 (si además hacemos C'=A, R=n).

(VI) Si transformamos por simetría respecto a P los vértices B y C, pero A(0,0) lo llevamos a (2x,2h). Si el triángulo es rectángulo en B (b=c), R=1.

(VII) Aplicamos transformaciones (4e) a un punto P(x,y). Para triángulos rectángulos pueden dar razones como x^2/c^2, y^2/h^2, $(c^2y^2+h^2x^2)/(c^2h^2)$, $((cy+hx)/(ch))^2$, xych o 2xych.

(VIII) Perpendiculares a los lados. Si ABC rectángulo $R= (x^2 - cx + y(y - h))/(c^2+h^2)$. Así que el lugar geométrico de los puntos del plano que al trazar los pies de las perpendiculares sobre un triángulo rectángulo forman un triángulo de razón k es una elipse de ecuación $x^2 - cx + y(y - h))=k(c^2+h^2)$. Con ABC equilátero:

$$3(3 x - 3 c x + y(3 y - c)) /4c \cdot$$

Claves o explicación para otros casos, es decir, a cualquier resultado de la tabla que viene a continuación ,si le aplicamos esas transformaciones, la R vendrá multiplicada por los números anteriores. Además, está claro por los numerosos ejemplos, quizás excesivos, que son una muestra pequeña de lo que es posible imaginar.

Explicación para las transformaciones 3.

Dado un punto P el *n*-simétrico respecto a Q será OT=OP+nQP. Dado cualquier polígono y el transformado por la *n*-simetría de un punto P con centro cada vez un vértice es sencillo probar que el área del transformado respecto al original es n^2. Si la *n*-simetría tiene de centro un punto (x,y) cualquiera, el transformado de un polígono tiene $R=(n-1)^2$ (ideas facilmente trasladables a R^m). También la transformación consecutiva: *Centro*=cada punto consecutivo se calcula el n-simétrico respecto al anterior de los tres puntos, siguiendo un orden. Los puntos transformados son el resultado de multiplicar el vector del lado del triángulo por n (A'=A+nAB), la razón de las áreas es $3n^2-3n+1$ (polinomio ligado a los números hexagonales). Para n=2 hace aparecer un 7.

Definimos ***NSIM(U, V) := n·(V - U) + U***, y lo aplicamos a los tres vértices sucesivamente de dos en dos, AB, BC, y CA. Si sólo transformamos dos puntos del triángulo de este modo la razón es n^2. En un tetraedro, la razón de los volúmenes así transformados da $4n^3-6n^2+4n-1$. En un símplex de 4 dimensiones: $5n^4 - 10n^3 + 10n^2 - 5n + 1$, en 5 dimensiones: $6n^5 - 15n^4 + 20n^3 - 15n^2 + 6n - 1$, etc. aún que podemos ver que son iguales a $(n-1)^{d+1}- n^{d+1}$, dónde d = dimensión del símplex. Para un cuadrilátero la razón de las áreas es $2n^2+2n+1$, para un polígono cualquiera la razón es f(n) siendo f un polinomio de segundo grado. Cuál?...

Para la n1-simetría, con d=2 vimos que era $R=n^2+n+1$ (definimos ***n1sim(u, v) := n·u - v***, y lo aplicamos a AB, BC y CA) . Si d=3, $R= n^3+n^2+n+1$, en general el polinomio ciclotómico $R=(n^{d+1}-1)/(n-1)$. Para la n2-simetría $(n+1)^{d+1}- n^{d+1}$. Para la np1, $R=(n^{d+1}-p^{d+1})/(n-p)$... Para la np, $R=((n+p)^{d+1}-n^{d+1})/p$. Si conservamos 1, 2, 3... puntos...

La transformación (3d), combinación lineal, da $R= 3m^2 + 3m(n -1) + 3n^2 - 3n + 1$

(definimos ***cl(u, v, w):= u + n·(v - u) + m·(w - u)*** y lo aplicamos a los tres vértices ABC, BCA y CAB).

La transformación (3e) da $R= m^2 - m(n + p) + n^2 - np + p^2$ (definimos ***simet(u,v,w):=mu+nv+pw*** y lo aplicamos a ABC, BCA, y CAB). Si hacemos una n-simetría como describimos antes pero con parámetros distintos k, l, m cada vez que la aplicamos, la razón es $R=k·(l + m - 1) + (l - 1)·(m - 1) = kl+km+lm-k-m-l+1$

Para una n1-simetría $R=kl+k +1$. Si invertimos el orden (CB, BA, AC), $R=m^2+m+1$. En la (3e) o en la n-simetría si invertimos el orden, R es la misma. Si en la (3e) los parámetros son distintos para cada punto A, B, C, ... En d dimensiones... En el problema inverso, queremos saber dada la R que transformación vectorial la produce...

Las TIC en la Didáctica de las Matemáticas

La idea que se quiere transmitir en este artículo es la pregunta de que si debemos enseñar a nuestros alumnos de Bachillerato para que sepan dividir bien sin calculadora o a demostrar e inventar teoremas con *Derive*. La verdad es que todos sabemos que los alumnos bien dotados, bien enseñados, tienen su máximo de potencial en esas edades de Bachillerato y primeros años de la Facultad. Lo que propongo es algo que puede hacer perfectamente un alumno de Bachillerato, más que con *Derive*, con imaginación. La herramienta, la calculadora, *Derive*, no es lo importante. Encontrar nuevos métodos de resolución de problemas actuales, y hacer volar el pensamiento de los alumnos, hacerlos volar a un mundo que se aproxima al que será el suyo, si lo es.

Algunos alumnos cogen la vocación de estudiar matemáticas por que son premiados en concursos. La verdad es que cada vez menos. Hay otro tipo de vocación que se crea por la afición a resolver problemas difíciles. Sin que, al revés de lo que piensan otros, estemos obligados a llevar alumnos a la Facultad, si que sería necesario lograr el objetivo de que ciertos alumnos consiguiesen hacer demostraciones elementales complejas, entendiesen que es eso de demostrar, y áun alcanzasen nuevos teoremas sencillos. Un camino posible para ese objetivo es la utilización de la tecnología. Que, además, tiene otras ventajas que no comentaremos ahora, ya que nos centraremos en este objetivo: Facilitar que los alumnos (y también el profesor, ¿por qué no?) experimenten el placer de la demostración y el descubrimento por ellos mismos. Habrá quien discuta si esa demostración es válida, ya que no está hecha con lápiz y papel,... pero es reproducible. Cualquiera, siguiendo los pasos propuestos y utilizando los mismos instrumentos, llega a la misma solución. Algunos de los resultados conseguidos son, pese a la elementalidad de los mismos, imposibles de conseguir con lápiz y papel, razón por la cual podemos tener cierta certeza de su novedad. O bien impublicables. Hoy en día, ninguna revista publicaría 30 páginas de fórmulas de geometría analítica que demuestren un resultado sencillo.

Se preguntaba Sarmiento (2001) en un artículo de GAMMA [5] si sería posible hacer matemáticas con los alumnos descubriendo resultados matemáticos reales (nuevos). Estamos dando un ejemplo de ésto en lo que estamos describiendo:

Transformando triángulos en triángulos. Dado un triángulo ABC damos una determinada regla por la que podamos deducir unívocamente otro triángulo A'B'C' (generalmente utilizando puntos o rectas notables del triángulo original) . Queremos saber que pasa con la razón de las áreas de los dos triángulos. Los "teoremas" que buscamos han de ser o bien una relación constante de las áreas o bien los límites entre los que se mueve la razón de las áreas, o bien casos especiales (en particular, caracterizaciones de triángulos rectángulos).

Para esto, podemos utilizar múltiples herramientas como *Cabri* o bien *Lugares*, el II Premio Galicia, para visualizar los triángulos, bien *Derive* para calcular las funciones resultantes, o bien *Cocoa*, *Matlab*, *Mathematica* o *Mapple*. De todas maneras, lo que se cuenta está hecho con *Derive*. Lo que está claro es que después de hacer estos ejercicios de descubrimiento los alumnos sabrán manejar los instrumentos informáticos en un contexto real, actual, al mismo tiempo que aprenden matemáticas reales, no sucedáneas, como pretenden algunos, considerando a nuestros alumnos como algo retrasados. De hecho tal tipo de búsqueda es la clave en ciertos teoremas como el de Menelao y Ceva, siendo en otros casos resultados evidentes como el transformado por los puntos medios de los lados. O bien son algún tipo de ejercicios usuales (como figuras inscriptibles en progresiones geométricas).

También, en conjunto, los resultados que se presentan forman una batería de ejercicios de geometría analítica, por un lado, y una fuente de reflexión (ahora si dándole la razón a Steiner), sobre el porqué de los resultados. Pero vamos a ellos...

Pero, ¿cómo se hace? Algunos ejemplos

Definimos (en *Derive*) ***NSPRPV(v, p) := n·(p - v) + v***; ***SPRPV(v, p) := 2·p – v*** (simétrico de punto respecto a punto con vectores); ***N1SPRPV(v, p) := n·p – v***. y definimos ***x:=[0,0]***, ***y:=[c,0]***, ***z:=[b,h]***.

· Transformación (3a). A' lo calcularemos con ***NSPRPV(x, y)*** después, (y,z) y (z,x).
Los resultados los ponemos en el determinante ***det([[b·(1 - n), h·(1 - n),1],[b·n + c·(1 - n), h·n,1],[c·n, 0,1]])= -ch(3n^2-3n+1)***. La razón R=(3n^2-3n+1). Si fuese n1-simétrico ***det([[c·n,0,1],[b·n - c, h·n,1],[-b, -h,1]]) = ch(n^2+n+1)***. Así R=(n^2+n+1).

· Sólo transformamos dos puntos ***NSPRPV(x, y)*** después, (y,z) El tercer punto es A. R=n^2. Si el tercero es B, R=n^2-n. Si es C, R=(n-1)^2. Con n1-simétrico los tres casos serían R=1; R=2; R=n+2.

· Calculamos el ortocentro del triángulo. Da (b, b(c - b)/h). Definimos así ***o:= [b, b·(c - b)/h]***. Calculamos ***SPRPV(x, o)***, después (y,o) y (z,o).
Los resultados los colocamos en el determinante (para el cálculo del área) ***det([[2·b, 2·b·(c - b)/h,1],[2·b - c, 2·b·(c - b)/h,1],[b, - (2·b^2 - 2·b·c + h^2)/h,1]])=ch***. Así la razón R=ch/(ch) (olvidamos los dos "2" que dividen, fórmula del área de un triángulo), R=1. Si fuese n-simétrico R=(n-1)^2. Si fuese n1-simétrico R=1. Cambiamos el papel del ortocentro y los vértices. Es decir, calculamos ***SPRPV(o, x)***, después (o,y) y (o,z).
El determinante ***DET([-b, b·(b - c)/h, 1; 2·c - b, b·(b -***

c)/h, 1;b,(b^2-bc+2h^2)/h, 1])=4ch. Luego R=4. Si fuese n-simétrico R=n^2. Si fuese n1-simétrico, R=n^2. Ahora podemos pensar que perdimos el tiempo ya que este caso es un caso particular del caso (IV), no es necesario que sea el ortocentro.

· Construimos el triángulo A', B', C' como el simétrico de cada punto respecto a la recta que pasa por los otros puntos (así A' es el simétrico de A respecto a la recta que pasa por B y C). Nos interesa la función ***Área(A',B',C')/Área(A,B,C).***

Después de unos cuantos cálculos con *Derive* resulta que ***Área(A',B',C')/Área(A,B,C)= (5·b^4 - 10·b^3·c + b^2·(5·c^2 + 2·h^2) - 2·b·c·h^2 - 3·h^2·(c^2 + h^2))/((b^2 + h^2)·(b^2 - 2·b·c + c^2 + h^2))***.

Si representamos esta función para un valor de c constante, se obtiene que es una función que cuando $h \to 0$ tiende a 5 y cuando $h \to \infty$ tiene por límite –3, tiene un mínimo de valor –4 (cuando el triángulo cumple que b=c/2, y es equilátero, sino un valor próximo a -4). En cualquier caso el rango máximo de la función es [-4,5) . Hay que destacar que esos límites no dependen de b (excepto en el caso que veremos a continuación de triángulo rectángulo). Y que el signo dependerá de la orientación escogida, claro, ya que calculamos el área de A'B'C' usando el determinante dado por los puntos de ese triángulo (completando la matriz con unos como todos sabemos).

Si b=c, o bien b=0, es decir el triángulo es rectángulo, la razón es siempre –3 (basta para probarlo con substituir en la fórmula del cociente de las áreas b y da –3, lo que se llama un "teorema *express*", no hay variación, la función del área es siempre constante). El recíproco no es tan *express*, pero tampoco difícil.

En el triángulo órtico, deducido del ABC por los pies de las alturas, la razón del área es ***2·h·(b^3 - 2·b^2·c + b·(c^2 + h^2) - c·h^2)/((b^2 + h^2)·(b^2 - 2·b·c + c^2 + h^2))***. Cuando $h \to \infty$ el límite es 0. Cuando $h \to 0$ el límite es 2. Evidentemente en el caso de triángulos rectángulos no hay nada que decir pues el triángulo órtico es un segmento (aunque la razón de las áreas es cero, es constante).

Para valores de b y c fijos, y 0<b<c la función pasa desde 2 a un valor mínimo próximo a 0 negativo para después ir creciendo pausadamente hasta el 0 en infinito. En otro caso va directamente desde 2 hasta el 0. el rango, en este caso es (0,2).

¿Que pasa con las bisectrices? Ahora la razón es algo tremebunda:

√(b^2 + h^2)·√(b^2 + h^2)·(√(b^2 - 2·b·c + c^2 + h^2) - 2·(b - c)) + √(b^2 - 2·b·c + c^2 + h^2)·(√(b^2 + h^2) + 2·(b - c)) - 2·b^2 + 4·b·c - 2·(c^2 + h^2))/((c - 2·b)·(√(b^2 + h^2) - c)·(√(b^2 - 2·b·c + c^2 + h^2) - 2·b + c))

Cuando $h \to \infty$, tiende a cero. Cando $h \to 0$, tiende a ***2·(c - b)·ABS(b)·(ABS(b) + b - c)·(SIGN(b - c) - 1)/((2·b - c)·(ABS(b) - c)·(ABS(b - c) - 2·b + c))*** y que si b >= c >0 da cero.

Si el triángulo es rectángulo tenemos el siguiente resultado. En el caso b=c la razón vale 2d(d+c)(d-h)/ch(c-h) y en el caso b=0 da 2h(d-h)/c(c-h) (d aquí es la hipotenusa). Este ejemplo prueba que no siempre obtenemos resultados interesantes.

Otro caso: En el triángulo deducido de ABC, por los puntos medios de los lados, es sobradamente conocido que la razón es 1/4. Si tomásemos en vez de los puntos medios, los puntos del tipo OA'=OA+AB/n o OA+AB(n-1)/n las razones serían $(n-1)/n^2$ o $(n^2-3n+3)/n^2$ según el caso.

También podemos definir el triángulo A'B'C' como el resultado de las intersecciones de las rectas paralelas al lado opuesto pasando por cada punto. Eneste caso la razón es siempre 4.

Hay que decir que aquí los triángulos están en posición inversa del caso anterior.

Pero es que si definimos (o inventamos la definición) que una recta es a-paralela de otra si las pendientes se relacionan así m'= m+a, entonces la razón de las áreas de los triángulos relacionados por ese paralelismo (

TÁBOA 1

Centro o relacionado con...	*Formado con...*	*Punto o lado Simétrico respecto al punto...*	*Punto o lado Simétrico respecto al lado...*
Baricentro	Puntos medios. R = 1/4 Puntos medios consecutivos = 7/4 composición de puntos medios y n-simétrico (n=2) consecutivo para ellos (3a).	Vértice opuesto. R = 1 (G_V) y R = 4 (G_{IV})	Lado opuesto Perpendiculares desde el baricentro a los lados. Límites 2/9. **Rectángulos = -2/9** **Equilátero 1/4**(2)
Incentro	Corte de bisectrices y lados. Formado con Lim inf=0.	Vértice opuesto (G_V y G_{IV}). Formado por Incentro, Circuncentro, Ortocentro **(ICO)** **Rectángulos: (h-c)/2suma lados. Si IBC** **(h-c)/6suma lados** **OBC cero (están en una recta). OIB (h-c)/3suma lados** **Equilátero 0**	Lado opuesto. Perpendiculares desde el incentro a los lados. Límites 0.
Ortocentro	Corte de alturas y lados (triángulo órtico) Límites 0 y 2. **Equilátero R =1/4** n-simétrico con centro los puntos del triángulo órtico, respecto a los vértices opuestos. Límites (n - 1)·(2·n + 1) y -(n+1) **Rectángulo R=n+1** **Equilátero** **R = $(n^2+4n+4)/4$**	Cada vértice respecto al ortocentro R =1 (G_V). Ortocentro respecto a cada vértice R = 4 (G_{IV}). n-simétrico cada pie de la perpendicular respecto vértice siguiente (sin importar el orden). **Rectángulos (b=c)$n(nc^2+(n-1)h^2)/(c^2+h^2)$** **(b=0) $n(c^2(n-1)+nh^2)/(c^2+h^2)$** **Equilátero $(4n^2-2n+1)/4$** Simétrico con centro cada vértice opuesto a cada pie, del pie. Lim 4 y 6(inf). **Rectángulos 6.** **Equiláteros 25/4** N-simétrico en el caso anterior **Rectángulos n(n+1) Equiláteros $(4n^2+4n+1)/4$ N1-simétricos....**	Lado opuesto.
Circuncentro	Corte de mediatrices y lados. Formado con R = 1/4 Puntos medios R =1/4	Vértice opuesto Puntos simétricos del circuncentro respecto a los vértices, R = 4 (G_V..G_{IV})	Lado opuesto Perpendiculares desde el circuncentro a los lados =1/4 (Se cortan en los puntos medios)
Cualquier punto (x,y)	Ya analizados antes		
Punto exótico, de Fermat, de Ceva, Feuerbach, Gergonne, Lemoine		Vértice opuesto	Lado opuesto

(2) Si hiciéramos simétricos del baricentro respecto a los lados -Límites -8/9
Rectángulos -8/9. Equilátero 1: Observar que este caso simplemente es aplicar el caso del pie de la perpendicular y una simetría. Si fuesen n-simétricos tendríamos (2(3n2-3n+1)/9), etc. Sobran por lo tanto en la tabla.

TABLA 2

Transformados por	***Desde***	***Corte***	***Desde***
Paralelismo	Vértices *R* = 4	Rectas 2 a 2	Otros puntos, pies de las alturas,....
a-paralelismo m’= m+a	Vértices	Rectas 2 a 2 ***R* = 4**	Otros puntos, pies de las alturas,...
ak-paralelismo Pendientes ak-paralelas m’=*k*(m+a)		Rectas 2 a 2 ak.paralelas pasando por los vértices	
k-paralelas m’= *k*m (caso particular del anterior)		$\boldsymbol{R = (k+1)^2/k}$ Rectas 2 a 2 pero uno de los puntos de corte se substituye por uno de los puntos ABC. Puede dar ***k*+1**, o **(*k*+1)/k**.	
Perpendicularidad	Vértices		Otros puntos
Trisección (multisección) de ángulos=Morley	Vértices	Rectas 2 a 2	Otros puntos
Rectas formando un ángulo a con los lados	Cortes, rectángulo en B, $2cotg^2(a)+c*cotg(a)/h$	Rectas 2 a 2	

A’B’C’ viene dado por los puntos de corte de las rectas “paralelas” al triángulo original por los vértices) **sigue siendo 4** (sorprendentemente independiente del valor de a).

Realmente, mucho mejor es hacer las tablas anteriores.

Ya sólo en la TABLA 1 tenemos muchas amplias categorías... a investigar. Los resultados que ponemos aquí pueden servir de base para comprobar que el método le funciona al lector... Pero puede imaginar otros métodos distintos de generar A'B'C'. Vimos también más ejemplos (TABLA 2).

Así podemos calcular el punto de Fermat, con centro en él, calcular los simétricos de los vértices, después de ese triángulo calculamos el ortocentro y los simétricos del ortocentro respecto a los lados, después...

Consideraciones finales

Realmente para acabar bien el artículo habría que estudiar todos los casos de Edgar Brisse (3053), pero como decía Descartes, el fundador de la Geometría Analítica, hay que dejar algo de trabajo para la posteridad o para los alumnos...[3]

Un buen texto para introducirse en las peculiaridades de *Derive* en la programación y resolución de teoremas con triángulos es el de Miguel de Guzmán [1], ya que trae numerosas funciones ya resueltas y ejemplos que pueden servir como base para los problemas aquí propuestos. De hecho, coincidimos en las ideas sobre proponer problemas, aún que él se refire a casos más

[3]Espero que la posteridad me juzgue bien, no sólo por las cosas que expliqué, sino por las cosas que omití intencionadamente para dejar a otros el placer de descubrir. (Rene Descartes)

generales y abiertos, en este artículo nos centramos en las relaciones entre las áreas, ver, por ejemplo:

> *Una técnica general para proponerse preguntas (a veces interesantes)*
>
> *He aquí una técnica general para hacerse preguntas más el menos interesantes y obtener resultados nuevos alrededor de la geometría del triángulo. Se parte de un triángulo ABC y de un punto P de su plano (o bien de una recta P en el mismo plano). A partir de estos elementos se realizan operaciones simétricas, (simétricas significa aquí que la misma operación que se ha hecho con A, por ejemplo, se hace con B y C) respecto de los elementos del triángulo (lados, vértices,...). Se llegan a obtener así tres elementos (puntos el rectas) a los que llamamos tA(P), tB(P), tC(P). A veces estos elementos están alineados (si son puntos) o son concurrentes (si son rectas). Si lo son, se obtiene una relación interesante. Y si no lo son, se estudia el lugar de los P, o la envolvente de los P, tales que tA(P), tB(P), tC(P) están alineados el son concurrentes. Esta es la forma general en que surgen algunas relaciones y lugares curiosos en la geometría del triángulo.*

Otro texto fundamental, para el tema que estamos a tratar, es el de Tomás Recio [2] en el que se desarrollan adecuadamente y con más profundidad las implicaciones didácticas del método de demostración y descubrimento automáticos sobre todo en el capítulo del mismo título, (pág. 69-100), del que destacamos este resumen:

> *-la utilización del ordenador para la demostración y el descubrimiento de resultados podría ser una forma de recuperar el razonamiento geométrico en la enseñanza.*
>
> *-proporcionando, además, un contexto significativo para la enseñanza de determinados aspectos de la manipulación algebraica (factorización, eliminación, simplificación de expresiones).*
>
> *-mediante la traducción (de los resultados obtenidos por el ordenador) en términos lógicos (condiciones, necesarias, suficientes, superfluas, hipótesis complementarias, etc.) o geométricos.*

Resumiendo, debemos, podemos y queremos jugar con las matemáticas desde la tecnología, indefinidamente.

Por último, decir que la demostración automática de teoremas es un campo activo de investigación en España y en Galicia, en el que son representantes destacados Tomás Recio, -del que su libro [2] es una fuente interesante de reflexión sobre el cálculo Simbólico y Geométrico en la Secundaria, y nuestros colegas Francisco Botana y José Luis Valcárcel. En este campo se usan como test precisamente teoremas del triángulo. Espero que algunos de éstos resultados les puedan servir en sus investigaciones (lo mismo que al caro lector le pueda sugerir otras).

Referencias

[1] GUZMÁN, M. de (2002): La experiencia de descubrir en Geometría, Editorial Nivola, Madrid.

[2] RECIO, T. (1998): Cálculo simbólico y Geométrico, Síntesis, Madrid.

[3] BOTANA, F. (1998): "Novos recursos para o ensino das Matemáticas: Xeometría Dinámica", Revista Galega del Ensino, 18, 171-183.

[4] QUESADA, A.R.: "New Mathematical Findings by Secondary Students", en http://www.javeriana.edu.co/universitas_scientiarum/vol6n2/ART1.htm.

[5] SARMIENTO, A. (2001): "¿Cómo se fan matemáti-

cas?", GAMMA, 1, 9-12.
[6] KIMBERLING, C.: Encyclopedia of triangle centers..., en http://faculty.evansville.edu/ck6/ (1114 puntos en el triángulo).
[7] BRISE, E.: "3053 puntos del triángulo con sus fórmulas", en http://pages.infinit.net/spqrsncf