GEOMETRÍA MÉTRICA EN UN SIMPLEX DE R^n

por
MANUEL DIAZ REGUEIRO

Gaceta Matemática 1ª Serie Tomo XXXII. Madrid 1981. Pág. 73-79

Comenzaré por algunas nociones elementales relativas al simplex n-dimensional a utilizar más adelante:

1) Un simplex de R^n está determinado por n vectores de R^n.

2) Tiene n + 1 vértices y n + 1 «caras» que son simplex de n - 1 dimensiones.

3) Dados n vectores de R^n , $v_1,v_2,....,v_n$, y conocidas sus coordenadas con respecto a una base ortonormal, el volumen del paralelotopo que determinan viene dado por V = det $(v_1,v_2,....,v_n)$.

4) El volumen de un simplex de R^n , viene dado por V = $\frac{V_b x h}{n}$, volumen de la base por altura dividido por n.

DEMOSTRACIÓN.-Si la altura está en la dirección del eje x y hacemos una sección mediante un hiperplano paralelo a la base en la coordenada x.
Si V_b, es el volumen de la base y V (x) es el volumen de la sección,

$$\frac{V_b}{h^{n-1}} = \frac{V(x)}{x^{n-1}};\quad V=\int_0^h V(x)dx = \frac{V_b}{h^{n-1}}\int_0^h x^{n-1}dx = \frac{V_b x h}{n}$$

5) Como consecuencia de lo, anterior el volumen de un simplex de R^n, determinado por los vectores vendrá dado por

$$V=\frac{\text{Volumen paraletotopo }(v_1,v_2,....,v_n)}{n!} = \frac{\det(v_1,v_2,....,v_n)}{n!}$$

6) En R^n llamaremos vector asociado a un hiperplano a un vector ortogonal al hiperplano.

7) Dados dos hiperplanos que se corten; si consideramos dos semihiperplanos, de los cuatro en que se dividen por el corte, vamos a definir su ángulo.
En primer lugar dividirán al espacio de R^n en dos partes, una interior al ángulo que forman y otra exterior. Para medir el ángulo que forman se define

Como el ángulo que forman dos vectores, cada uno de ellos asociado a uno de los hiperplanos, uno de ellos con sentido hacía el semiespacio interior y el otro con sentido hacia el semiespacio exterior.

8) El término «cara» tiene aquí exclusivamente el sentido de celda limitante de *n-1* dimensiones. «Vector», en general, será un vector libre de R^n, pero en cuanto a constituyente de un simplex, tendrá origen y extremo. Para «determinar» o diseñar un simplex dados *n* vectores libres de R^n, lo haremos dando un origen común a esos vectores y uniendo sus extremos entre sí.

PRODUCTO EXTERIOR DE *n -1* VECTORES DE R^n

Dados *n-1* vectores linealmente independientes de R^n, $v_2,v_3,....,v_n$, *se* define su producto exterior $v_2xv_2x....xv_n$, como un vector ortogonal a cualquier hiperplano con subespacio vectorial de dirección generado por esos vectores; de módulo el volumen del paralelotopo que forman esos *n - 1* vectores ; y con sentido dado por una regla determinada (que no fijaré pues los resultados que siguen son independientes del sentido con que se haya definido el producto exterior).

Si los vectores tienen las coordenadas, respecto a una base ortonormal, siguientes :

$v_2=(v_{21}, v_{22}, v_{23},\ldots\ v_{2n})$

$v_3=(v_{31}, v_{32}, v_{33},\ldots\ v_3)$

……………

$v_n=(v_{n1}, v_{n2}, v_{n3},\ldots\ v_{nn})$

entonces, el vector de R^n

$$v_2 x v_3 x \ldots x v_n = \left(\begin{vmatrix} v_{22} & . & . & v_{2n} \\ v_{32} & . & & v_{3n} \\ . & . & . & . \\ v_{n2} & . & . & v_{nn} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_{21} & v_{23} & \ldots & v_{2n} \\ v_{31} & v_{33} & \ldots & v_{3n} \\ . & . & . & . \\ v_{n1} & v_{n3} & \ldots & v_{nn} \end{vmatrix}, \ldots\ldots, (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} v_{21} & . & . & v_{2n-1} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ v_{n1} & .. & . & v_{nn-1} \end{vmatrix} \right)$$

cumple las condiciones que hemos impuesto al producto exterior de vectores, ya que 1) es ortogonal a v_i (i = 2, 3, ..., n)

$$v_i . v_2 x v_3 x \ldots x v_n = \begin{vmatrix} v_{i1} & v_{i2} & . & . & v_{in} \\ v_{21} & v_{22} & . & . & v_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ v_{i1} & v_{i2} & . & . & v_{in} \\ . & . & . & . & . \\ v_{n1} & v_{n2} & . & . & v_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

2) El módulo del producto exterior es igual al volumen del paralelotopo que forman los n - 1 vectores.

Sea v_1 un vector unitario ortogonal al subespacio generado por $v_2,v_3,\ldots,v_n$ y de coordenadas $v_1=(v_{11}, v_{12}, v_{13},\ldots\ v_{1n})$ respecto a la misma base ortonormal, entonces

$$v_1 .(v_2 x v_3 x \ldots x v_n) = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & . & . & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & . & . & v_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ v_{i1} & v_{i2} & . & . & v_{in} \\ . & . & . & . & . \\ v_{n1} & v_{n2} & . & . & v_{nn} \end{vmatrix} = |v_1| . |v_2 x \ldots x v_n| . \cos a$$

La conclusión se deduce del hecho de que $|v_1|=1$; de que $\alpha = 0$ o π; de que el volumen de un paralelotopo es igual al determinante de los vectores que lo determinan y también al volumen de la base por la altura.

3) El sentido sigue una regla bien definida.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO EXTERIOR DE N -1 VECTORES

Consecuencia de su definición son:

1) Si en el producto hay dos vectores iguales, el resultado es 0.

2) Es lineal para cada uno de los factores.

3) Al cambiar 2 factores cualquiera entre sí, el producto exterior cambia de signo.

4) Si uno de los factores del producto es una combinación lineal de otros factores, el producto exterior es 0.

LEMA 1.-Dados n vectores de R^n, $v_1,v_2,....,v_n$, se cumple que:
$(v_2-v_1)x(v_3-v_1)x(v_4-v_1)x.....(v_n-v_1)= v_2xv_3x....xv_n- v_1xv_3x\ v_4x....xv_n- v_2xv_1x\ v_4x....xv_n- v_2xv_3x\ v_1x....xv_n-..............- v_2xv_3x\ v_4x....xv_1$

Para demostrarlo sólo hay que tener en cuenta las_propiedades 1 y 2 del producto exterior.
Además se puede observar que, dado un simplex de R^n determinado por esos n vectores $v_1,v_2,....,v_n$, sus simplex-caras n - 1 dimensionales, están determinados por los vectores

1) $v_2,v_3,....,v_n$
2) $v_1,v_3, v_4,....,v_n$
3) $v_2,v_1, v_4,....,v_n$
4) $v_2,v_3, v_1,....,v_n$
....
n) $v_2,v_3, v_4,....,v_1$
n+1) $v_2-v_1,v_3-v_1, v_4-v_1,....,v_n-v_1$

Es decir que en la igualdad del lema 1 aparecen los productos exteriores de los n - 1 vectores que determinan cada uno de los simplex *n - 1* dimensionales integrantes del simplex n dimensional.

TEST DEL SENTIDO

Dados *n* vectores $v_1,v_2,....,v_n$, con un origen común, diremos que $v_2xv_3x....xv_n$ tiene sentido hacia dentro del simplex determinado por los n vectores si $v_1 .(v_2xv_3x....xv_n)$ es un número positivo; y hacia fuera del simplex si $v_1 .(v_2xv_3x....xv_n)$ es negativo.

LEMA 2.-Sean los $V_1,V_2,....,V_{n+1}$,los volúmenes de los simplex-cara de un simplex de R^n. Sea α_{ij} el ángulo que, forman las caras i y j del simplex. Se cumple que:

$$V_1{}^2=V_1 \cdot V_2 \cos \alpha_{12}+ V_1 \cdot V_3 \cos \alpha_{13}+\ldots\ldots + V_1 \cdot V_n \cos \alpha_{1n}+ V_1 \cdot V_{n+1} \cos \alpha_{1n+1}$$

(de igual forma para cualquier otra cara intercambiando los índices).

DEMOSTRACIÓN.-Sea un simplex determinado por los vectores $v_1,v_2,....,v_n$
Sea V_1 el volumen de simplex determinado por $v_2,v_3,....,v_n$
V_2 el volumen de simplex determinado por $v_1,v_3, v_4,....,v_n$
V_3 el volumen de simplex determinado por $v_2,v_1, v_4,....,v_n$
V_4 el volumen de simplex determinado por $v_2,v_3, v_1,....,v_n$
....
V_n el volumen de simplex determinado por $v_2,v_3, v_4,....,v_1$
V_{n+1} el volumen de simplex determinado por $v_2-v_1,v_3-v_1, v_4-v_1,....,v_n-v_1$
En este caso,

$$V_1=\frac{|v_2xv_3x....xv_n|}{(n-1)!}$$

$$V_2=\frac{|v_1xv_3x....xv_n|}{(n-1)!}$$

....

$$V_{n+1}=\frac{|(v_2-v_1)x(v_3-v_1)x....x(v_n-v_1)|}{(n-1)!}$$

Entonces, si el lema 1 lo escribimos
$v_2xv_3x....xv_n =(v_2-v_1)x(v_3-v_1)x(v_4-v_1)x.....(v_n-v_1)+ v_1xv_3x\ v_4x....xv_n+ v_2xv_1x\ v_4x....xv_n+v_2xv_3x\ v_1x....xv_n+..............+ v_2xv_3x\ v_4x....xv_1$

y multiplicando escalarmente, esta igualdad por $v_2xv_3x....xv_n$, denotando,

$u_1= v_2xv_3x....xv_n$

$u_2= v_1xv_3x....xv_n$

………………….

$u_n= v_2xv_3x....xv_1$

$u_{n+1}= (v_2-v_1)x(v_3-v_1)x(v_4-v_1)x…..(v_n-v_1)$

resulta

$|u_1|^2=|u_1|\cdot|u_2|\cos(u_1, u_2)+|u_1|\cdot|u_3|\cos(u_1, u_3)+......+|u_1|\cdot|u_n|\cos(u_1, u_n)+|u_1|\cdot|u_{n+1}|\cos(u_1, u_{n+1})$

Aplicamos ahora el test del sentido si $v_1 .u_1$ es, por ejemplo, positivo, es decir, el vector u_1 tiene el sentido hacia dentro del simplex, entonces,

$v_2 .u_2 = - v_1 .u_1$ y u_2 está dirigido hacia fuera del simplex. Idem con u_3, ya que $v_3 .u_3 = - v_1 .u_1$, con u_4, etc., hasta u_n, ya que $v_n .u_n = - v_1 .u_1$. Por, último, para saber el sentido de u_{n+1} lo multiplicamos escalarmente por $–v_1$, (vector del simplex con el mismo origen que los factores de u_{n+1}) y resulta $– v. u_{n+1}= - v_1 .u_1$ (sin más que efectuar las operaciones). Luego u_{n+1} , está dirigido hacia fuera del simplex.

De aquí el ángulo $(u_1, u_2)=\alpha_{12}$ ya que α_{12} es el ángulo del semihiperplano que contiene al simplex 1 con el que contiene al 2, y, por definición, es el ángulo que forman dos vectores, cada uno de ellos asociado a un hiperplano, y con sentido, uno hacia el semiespacio interior, y otro hacia el semiespacio exterior (tal y como cumplen u_1, y u_2, como hemos comprobado con el test del sentido). De igual forma,

$(u_1, u_3)=\alpha_{13}$

……….

$(u_1, u_n)=\alpha_{1n}$

$(u_1, u_{n+1})=\alpha_{1n+1}$

Luego podemos escribir

$|u_1|^2=|u_1|\cdot|u_2|\cos\alpha_{12}+|u_1|\cdot|u_3|\cos\alpha_{13}+......+|u_1|\cdot|u_n|\cos\alpha_{1n}+|u_1|\cdot|u_{n+1}|\cos\alpha_{1n+1}$

Dividiendo ahora esta igualdad por (n - 1)!, resulta

$$V_1^2=V_1\cdot V_2\cos\alpha_{12}+V_1\cdot V_3\cos\alpha_{13}+......+V_1\cdot V_n\cos\alpha_{1n}+V_1\cdot V_{n+1}\cos\alpha_{1n+1}$$

***TEOREMA 1.*-En** un simplex de R^n, cuyos simplex-caras tengan de volumen $V_1 ,V_2, ….V_{n+1}$ tenemos que:

$$V_1^2+….+V_i^2-2V_1\cdot V_2\cos\alpha_{12}-2V_1\cdot V_3\cos\alpha_{13}.....-2V_1\cdot V_i\cos\alpha_{1i}…-2V_{i-1}\cdot V_i\cos\alpha_{i-1i}=$$
$$V_{i+1}^2+….+V_{n+1}^2-2V_{i+1}\cdot V_{i+2}\cos\alpha_{i+1\,i+2}-2V_{i+1}\cdot V_{i+3}\cos\alpha_{i+1\,i+3}.....-2V_n\cdot V_{n+1}\cos\alpha_{n\,n+1}$$

DEMOSTRACIÓN.-Dadas las n + 1 igualdades,

$$V_1^2=V_1\cdot V_2\cos\alpha_{12}+V_1\cdot V_3\cos\alpha_{13}+......+V_1\cdot V_n\cos\alpha_{1n}+V_1\cdot V_{n+1}\cos\alpha_{1n+1}$$

…………………………………………………………………

$$V_{n+1}^2=V_1\cdot V_{n+1}\cos\alpha_{1n+1}+......+V_{n+1}\cdot V_n\cos\alpha_{n+1\,n}$$

sustituyéndolas en la igualdad que queremos probar, comprobamos que se verifica, dando, los dos lados de la igualdad,

$$2V_1\cdot V_{i+1}\cos\alpha_{1\,i+1}+......+2V_{n+1}\cdot V_i\cos\alpha_{n+1\,i}$$

COROLARIO.-Ya que en la fórmula del teorema 1 ni el número i, ni el orden 2, 3, ..., n, son esenciales en la demostración, esa fórmula se podrá escribir variando i desde 1 hasta n. Y, para cada i, permutando los índices obtendremos fórmulas diferentes.

Como ejemplo en R^4 tenemos las fórmulas

$V_1^{\ 2} = V_2^{\ 2} + V_3^{\ 2} + V_4^{\ 2} + V_5^{\ 2} - 2V_2 \cdot V_3 \cos \alpha_{23} - 2V_2 \cdot V_4 \cos \alpha_{24} - 2V_2 \cdot V_5 \cos \alpha_{25} - 2V_3 \cdot V_4 \cos \alpha_{34} - 2V_3 \cdot V_5 \cos \alpha_{35} - 2V_4 \cdot V_5 \cos \alpha_{45}$

$V_1^{\ 2} + V_2^{\ 2} - 2V_1 \cdot V_2 \cos \alpha_{12} = V_3^{\ 2} + V_4^{\ 2} + V_5^{\ 2} - 2V_3 \cdot V_4 \cos \alpha_{34} - 2V_3 \cdot V_5 \cos \alpha_{35} - 2V_4 \cdot V_5 \cos \alpha_{45}$

y todas las permutaciones de índices que queramos en éstas nos dan nuevas fórmulas.

TEOREMA 2.-Si en un simplex de R^n tenemos que $\alpha_{ij=}90^{o}$ $i \neq j$, $i \leq k$, $j \leq k$
y también que $\alpha_{lm=}90^{o}$ para $l \neq m$. $l > k$, $m > k$. Entonces
$V^2_1 + V^2_2 + \ldots + V^2_k = V^2_{k+1} + V^2_{k+2} + \ldots + V^2_{n+1}$

DEMOSTRACIÓN.- Trivial.

NOTA.- Se verifica el teorema igual si, en todo su enunciado, hacemos una permutación de índices.
Ejemplo, en R^4 ,
$V^2_{1=} V^2_2 + V^2_3 + V^2_4 + V^2_5$ si
$\alpha_{23} = \alpha_{24} = \alpha_{25} = \alpha_{34} = \alpha_{35} = \alpha_{45} = 90^o$
Y
$V^2_1 + V^2_2 = V^2_3 + V^2_4 + V^2_5$ si $\alpha_{12} = \alpha_{34} = \alpha_{35} = \alpha_{45} = 90^o$
o cualquier otra fórmula resultante de éstas permutando los índices.

BIBLIOGRAFÍA

HERMANN GRASSMANN: *Teoría de la extensión.* Espasa Calpe, 1947.
ERNST PESCHL: *Geometría Analítica y álgebra lineal,* Selecciones Científicas, Madrid, 1970.

GEOMETRÍA MÉTRICA EN UN TETRAEDRO

Manuel Díaz Regueiro
Instituto de Bachillerato "Juan Montes". Lugo.

Boletín das Ciencias de Enciga. nº 3. Xuño de 1989.

Si v_1 y v_2 son dos vectores ortogonales en el espacio por el Teorema de Pitágoras se cumple que:

$|v_1 + v_2|^2=|v_1|^2+|v_2|^2$ (1)

$|v_1 - v_2|^2=|v_1|^2+|v_2|^2$ (2)

1) Relación métrica entre las caras de un tetraedro que tenga un triedro trirrectángulo.

Si Δ_1, Δ_2, Δ_3, son las áreas de los triángulos rectángulos del tetraedro y Δ_4 el área de la otra cara se cumple que $\Delta^2_1+\Delta^2_2+\Delta^2_3=\Delta^2_4$

A las aristas del tetraedro le asociamos los vectores v_1, v_2, v_3 (formando el triedro trirrectángulo) y $v_3 - v_1$, $v_3 - v_2$, $v_2 - v_1$

(ver figura 1)

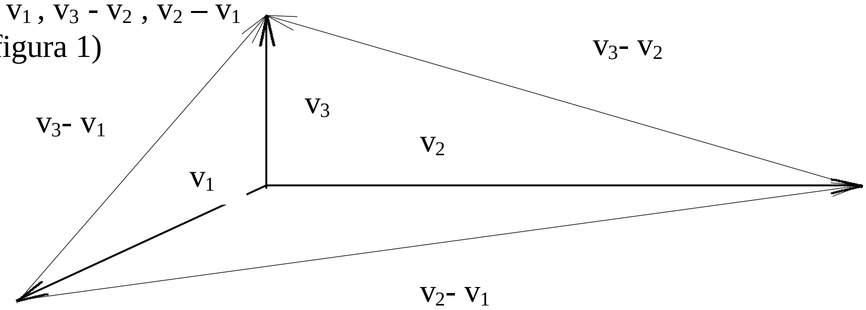


FIGURA 1: $\mathbf{\Delta^2_1+\Delta^2_2+\Delta^2_3=\Delta^2_4}$

Relación entre las áreas de las caras de un tetraedro con un triedro trirrectángulo.

Para probarlo tenemos que, (siendo x el producto vectorial):

$|v_3 \times v_2|^2+|v_1 \times v_2|^2=|v_3 \times v_2 - v_1 \times v_2|^2$ por (2) ya que $v_3 \times v_2$ y $v_1 \times v_2$ son dos vectores ortogonales.

$|v_3 \times v_2 - v_1 \times v_2|^2+|v_3 \times v_1|^2=|v_3 \times v_2 - v_1 \times v_2 - v_3 \times v_1|^2=|(v_3-v_1)\times(v_2-v_1)|^2$

puesto que $v_1 \times v_1=\mathbf{0}$ y que $v_3 \times v_1$ y $v_3 \times v_2 - v_1 \times v_2$ son dos vectores ortogonales; con lo cual

$|(v_3-v_1)\times(v_2-v_1)|^2=|v_3 \times v_2|^2+|v_1 \times v_2|^2+|v_3 \times v_1|^2$

Dividiendo por 4 esta igualdad y teniendo en cuenta, que $\Delta_1=|v_1 \times v_2|/2$

$$\Delta_2=|v_3 \times v_1|/2$$
$$\Delta_3=|v_3 \times v_2|/2$$
$$\Delta_4=|(v_3-v_1)\times(v_2-v_1)|/2$$

obtenemos

$$\Delta^2_1+\Delta^2_2+\Delta^2_3=\Delta^2_4$$

2) Relación métrica entre las caras de un tetraedro con dos diedros rectos cuyas aristas no se corten en un vértice (o que no tengan un plano en común):

Siendo Δ_1, Δ_2, las áreas de las caras que forman un diedro recto, y Δ_3, Δ_4 las del otro se cumple que:

$$\Delta^2_1+\Delta^2_2=\Delta^2_3+\Delta^2_4$$

Para probarlo, en un tetraedro con esas características colocamos en sus aristas los vectores v_1, v_2, v_3, $v_2 - v_3$, $v_2 - v_1$, $v_1 - v_3$ (ver figura 2), suponiendo que un diedro recto es el que forma el plano que contiene a los vectores v_2 y v_3, y el plano que contiene a los vectores $v_2 - v_3$, y $v_1 - v_3$. El otro diedro recto es el formado por el plano que contiene v_1 y v_2 y por el plano que contiene a v_1 y v_3.

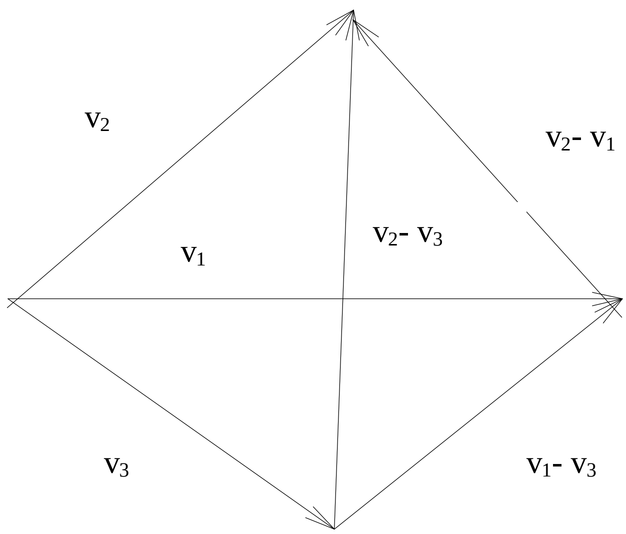


FIGURA 2: $\Delta^2_1 + \Delta^2_2 = \Delta^2_3 + \Delta^2_4$

Relación entre las áreas de un tetraedro con dos diedros rectos sin plano común.
Entonces,
$|(v_2 - v_3)x(v_1 - v_3)|^2 + |v_2 \, x \, v_3|^2 = |(v_2 - v_3)x(v_1 - v_3) + v_2 \, x \, v_3|^2$ por (1)
$= |v_2 \, x \, v_1 - v_3 \, x \, v_1 - v_2 \, x \, v_3 + v_2 \, x \, v_3|^2 = |v_2 \, x \, v_1 - v_3 \, x \, v_1|^2 = |v_2 \, x \, v_1|^2 + |v_3 \, x \, v_1|^2$

por (2). Dividiendo la igualdad $|(v_2 - v_3)x(v_1 - v_3)|^2 + |v_2 \, x \, v_3|^2 = |v_2 \, x \, v_1|^2 + |v_3 \, x \, v_1|^2$ por 4 obtenemos

$$\Delta^2_1 + \Delta^2_2 = \Delta^2_3 + \Delta^2_4$$

3) En un tetraedro ABCD, que tenga un triedro trirrectángulo en B, trazamos un plano que pase por una de las aristas (BC) del triedro trirrectángulo y sea perpendicular a la cara opuesta a dicho triedro (ADC). Ese plano seccionará al tetraedro en dos (ABCE y BCDE). Sean K, L, M, N, P las áreas de BCE, ABE, BDE, AEC, ECD (ver figura 3) se cumple que K^2 =PN-LM.

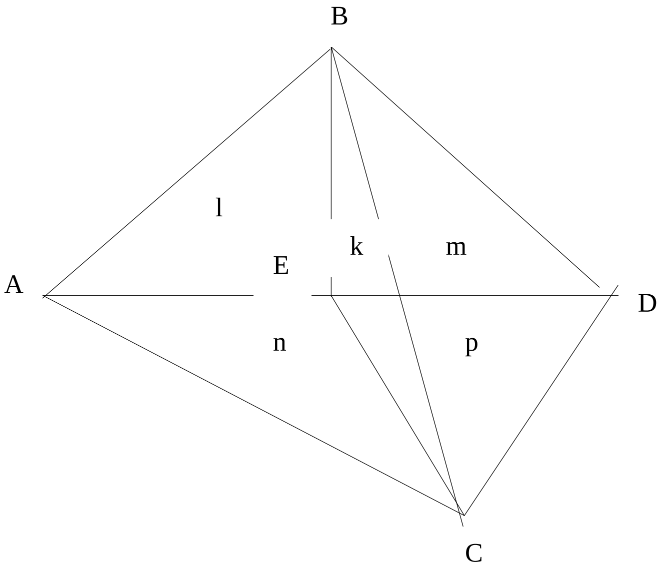


FIGURA 3: $\mathbf{K^2 = PN-LM.}$
Traducción del teorema de la altura a un tetraedro

A los tetraedros ABCE y BCDE se les puede aplicar la proposición 2, por lo que, si Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 son las áreas de ABC, ABD, ACD, BCD, tenemos,

$$\Delta_1^2+L^2=K^2+N^2$$

$$\text{y } \Delta_2^2+M^2=K^2+P^2$$

por la proposición 1 tenemos

$$\Delta^2_1+\Delta^2_2+\Delta^2_3=\Delta^2_4$$

además de Δ_3=L+M y Δ_4=N+P. De aquí

$$\Delta^2_1+\Delta^2_2=(N+P)^2-(L+M)^2$$

$$\Delta^2_1+\Delta^2_2=N^2+K^2-L^2+K^2+P^2-M^2$$

$2K^2-2PN+2LM=0$ es decir, $K^2=PN-LM$.

4). En el tetraedro ABCD de la figura anterior se verifica:

$\mathbf{\Delta^2_1=N\,\Delta_4-L\,\Delta_3}$

Utilizando las ecuaciones $\Delta_1^2+L^2=K^2+N^2$ y K^2= PN-LM se obtiene

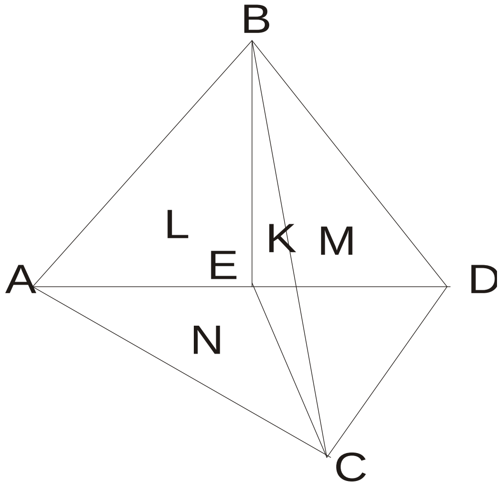
$$\Delta_1^2+L^2=PN-LM+N^2$$

de aquí, $\Delta_1^2=N(P+N)-L(L+M)$, luego $\mathbf{\Delta^2_1=N\,\Delta_4-L\,\Delta_3}$.

5) En un tetraedro ABCD con dos diedros rectos no contiguos (ver figura 4) de aristas las rectas BC y AD respectivamente, y tales que esas rectas tengan sus vectores de dirección ortogonales, si trazamos por BC un plano perpendicular a la cara ADC, el área K de la sección que determina dicho plano verifica K^2=LM+NP siendo L, M y N, P las áreas de los triángulos en que el plano divide a las caras ABD y ADC, respectivamente.

FIGURA 4: $\mathbf{K^2 = PN+LM}$

Otra versión del teorema de la altura. Los diedros de aristas AD y BC son rectos y AD y BC son vectores ortogonales.



Para probarlo, teniendo en cuenta que los tetraedros ABCE y BDCE tienen triedros trirrectángulos con vértice en E, llamando al área de ABD=Δ_1, área de ADC=Δ_2 , área de ABC=Δ_3 ,área de BDC=Δ_4, se cumple

que $\Delta^2_1+ \Delta^2_2= \Delta^2_3+\Delta^2_4$

y que $\Delta^2_3= K^2+ L^2+ N^2$

$\Delta^2_4= K^2+ M^2+ P^2$

de aquí, como Δ_2=N+P y Δ_1 =L+M,

$\Delta^2_3+\Delta^2_4= K^2+ L^2+ N^2 +K^2+ M^2+ P^2$

$\Delta^2_3+\Delta^2_4= L^2+ M^2+2LM+ N^2 + P^2+ 2NP$

restando $2K^2 -2LM-2NP =0$, es decir $\mathbf{K^2= LM+NP}$

6) En el tetraedro ABCD de la proposición anterior, se cumple que:

$\mathbf{\Delta^2_3= L\Delta_1 +N\Delta_2}$

Demostración: $\Delta^2_3= K^2+ L^2+ N^2$, como K^2=LM+NP, Δ^2_3=LM+NP+ $L^2+ N^2$ =L (M+L) +N (N+P) =LΔ_1 +NΔ_2

Por último, para completar el estudio de las área de las de un tetraedro, se demuestra:

a) (Carnot) En un tetraedro se cumple que:

$$\mathbf{\Delta^2_1= \Delta^2_2+ \Delta^2_3+\Delta^2_4-2\Delta_2\Delta_3 \cos \alpha_{23}-2\Delta_2\Delta_4 \cos \alpha_{24}-2\Delta_3\Delta_4 \cos \alpha_{34}}$$

siendo(por ejemplo) α_{34} el ángulo del diedro que forman las caras 3 y 4.

b) En cualquier tetraedro se cumple que:

$$\mathbf{\Delta^2_1+ \Delta^2_2-2\Delta_1\Delta_2 \cos \alpha_{12}=\Delta^2_1= \Delta^2_3+\Delta^2_4-2\Delta_3\Delta_4 \cos \alpha_{34}}$$

En primer lugar, definimos que un vector ortogonal a una de caras de un diedro tiene sentido hacia el exterior del diedro colocado su origen en cualquier punto de esa cara (a la cual ortogonal) su extremo no cae en la zona del espacio interior del diedro. Ese vector ortogonal, en otro caso, diremos que tiene sentido orientado hacia el interior del diedro.

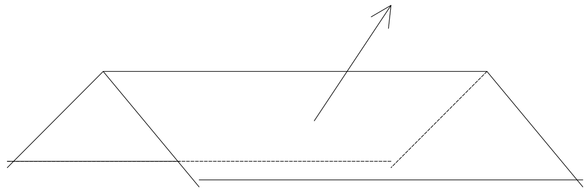


FIGURA 5: Vector ortogonal a una de las caras del diedro y con orientación hacia el exterior.
Definimos el ángulo de un diedro como el ángulo de dos vectores asociados u ortogonales a cada uno de los planos del diedro y sentido u orientación a semiespacios (de los que divide el diedro al espacio) distintos.

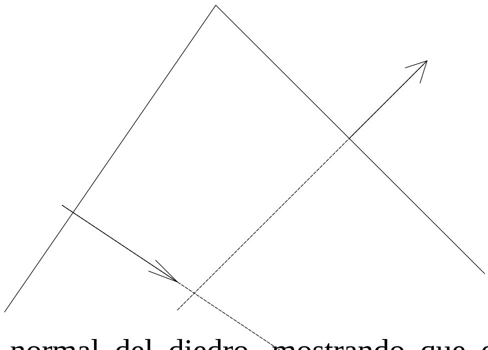


FIGURA 6: Sección normal del diedro, mostrando que el ángulo diedro es idéntico al que forman los vectores asociados a planos, uno interior y otro exterior al diedro.
Ángulo de un diedro definido por tres vectores:
Dados tres vectores v_1, v_2, v_3 inscritos en un diedro de forma que v_1 y v_3 están en caras distintas del diedro y v_3 está en la recta arista, y los tres vectores tengan un origen común, v_1x v_2 es un vector ortogonal a uno de los planos. Si está orientado hacia el exterior del diedro, entonces $v_1xv_2.v_3$ es negativo puesto que el ángulo que forman esos dos vectores es mayor de 90^o y positivo en caso contrario. En cualquier caso, v_3xv_2 ha de tener sentido opuesto hacia el diedro que el de v_1xv_2, puesto que $(v_3xv_2).v_1=-(v_1xv_2).v_3$, es decir, si suponemos que $(v_1xv_2).v_3$ es positivo, v_1xv_2 está orientado hacia el interior del diedro porque forma un ángulo menor o igual a 90^o con v_3, pero v_3xv_2 formará ángulo mayor de 90^o con v_1 luego deberá tener sentido hacia exterior del diedro.
En resumen v_1xv_2 y v_3xv_2 tienen sentido opuesto respecto al diedro y permiten definir el ángulo que forma el diedro como el ángulo que forman v_1xv_2 y v_3xv_2.
Instalemos en el tetraedro los vectores v_1 , v_2 ,v_3 , $v_3 – v_1$, $v_2 – v_1$ y $v_2 – v_3$.
El área Δ_1=| v_3 x v_2 |/2
Δ_2=| v_1 x v_2 |/2
Δ_3=| v_3 x v_1 |/2
Δ_4=| $(v_3 –v_1)x(v_2 – v_1)$|/2

el ángulo diedro α_{12} es igual al ángulo que forman los vectores v_3 x v_2 y v_1 x v_2
el ángulo diedro α_{13} es el ángulo que forman los vectores v_3 x v_1 y v_3 x v_2. Por último, α_{14} lo forman los vectores v_3 x v_2 y $(v_3 –v_1)x(v_2 – v_1)$, ya que v_3 x v_2 tendrá un sentido u otro respecto al diedro de arista
v_3 -v_2 dependiendo del signo de v_1 .(v_3 x v_2) y el sentido respecto al mismo diedro de $(v_3 –v_1)x(v_2 – v_1)$, depende del valor del producto escalar - v_1 . ($(v_3 –v_1)x(v_2 – v_1)$) (- v_1 es un vector con el

mismo origen que ($v_3 - v_1$) y ($v_2 - v_1$)), que es igual a $-v_1 .(v_3 \times v_2)$, es decir tiene signo opuesto al anterior, por lo que esos dos vectores tienen sentido opuesto respecto al diedro.
Entonces, de la igualdad vectorial
$v_3 \times v_2 = (v_3 - v_1) \times (v_2 - v_1) + v_3 \times v_1 + v_1 \times v_2$
Si multiplicamos escalarmente por $v_3 \times v_2$ la igualdad y dividimos por 4
obtenemos
$\Delta^2_1 = \Delta_1 \Delta_4 \cos \alpha_{14} + \Delta_1 \Delta_2 \cos \alpha_{12} + \Delta_1 \Delta_3 \cos \alpha_{13}$
de igual forma se obtienen
$\Delta^2_2 = \Delta_2 \Delta_4 \cos \alpha_{24} + \Delta_1 \Delta_2 \cos \alpha_{12} + \Delta_2 \Delta_3 \cos \alpha_{23}$
$\Delta^2_3 = \Delta_3 \Delta_4 \cos \alpha_{34} + \Delta_3 \Delta_2 \cos \alpha_{32} + \Delta_1 \Delta_3 \cos \alpha_{13}$
$\Delta^2_4 = \Delta_1 \Delta_4 \cos \alpha_{14} + \Delta_4 \Delta_2 \cos \alpha_{42} + \Delta_4 \Delta_3 \cos \alpha_{43}$
que sustituidos en a) y b) demuestran estos dos resultados.

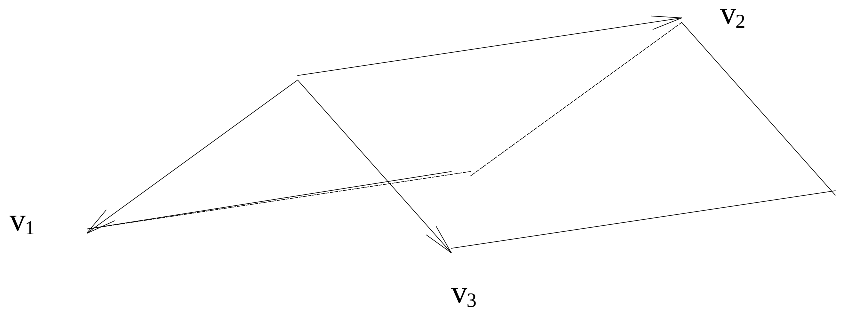


Figura 7: Diedro definido por tres vectores.

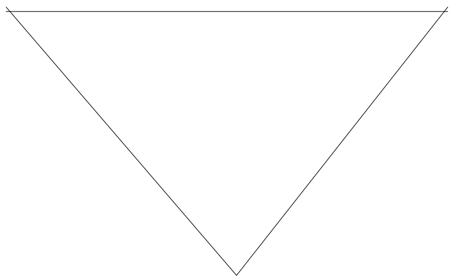
Bibliografía

Geometría métrica en un simplex de R^n. Manuel Díaz Regueiro. Gaceta Matemática. Tomo XIII. Número 5-6. Madrid. 1981.
Géométrie de position. Lazare Carnot.1803.

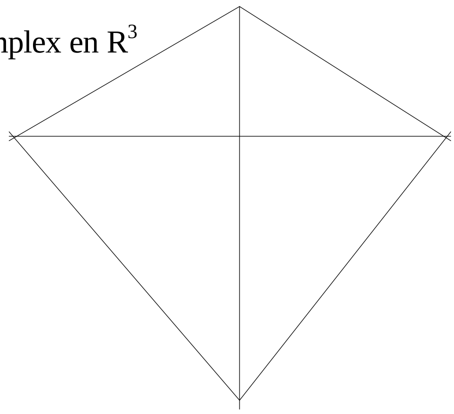
Apéndice 1

Simplex en R^1

Simplex en R^2

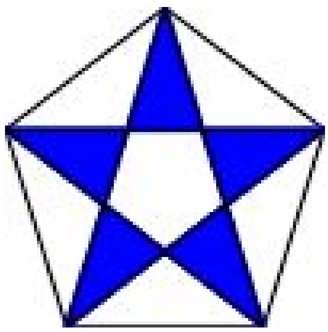


Simplex en R^3



Simplex en R^4

añádele un vértice y traza las rectas que unen ese vértice con los del simplex de R^3



Apéndice 2

En R^n se cumple que:

Un simplex

Tiene n+1 simplex "caras" de dimensión n-1.

Tiene $\binom{n+1}{2}$ simplex "aristas" de dimension n-2

Tiene $\binom{n+1}{3}$ simplex "aristas" de dimension n-3

Etc…

Tiene n+1 "vértices", puntos de R^n

Un hiperplano está definido por n puntos. O por n-1 puntos y un vector de dirección más.

Si un simplex está en el caso del

TEOREMA 2.-Si en un simplex de R^n tenemos que $\alpha_{ij=}90^{o}$ $i\neq j$, $i \leq k$, $j \leq k$ y también que $\alpha_{lm=}90^{o}$ para $l\neq m$. $l > k$, $m > k$. Entonces

$$V^2_1 + V^2_2 + \ldots + V^2_k = V^2_{k+1} + V^2_{k+2} + \ldots + V^2_{n+1}$$

Y hacemos una sección con un hiperplano que divide al simplex en dos, pasa por una arista (dimension n-2) común a 2 simplex (de dimensión n-1) del conjunto V_1 ,V_2 ,…., V_{n+1} y además es ortogonal a todos los simplex "caras" (de dimensión n-1) restantes (n-1). Supongamos por simplicidad de notación que sean V_1 y V_2

Dividirá en dos partes a los restantes

$V_i=L_i+M_i$

I=3,…,n+1

Sea el volumen del simplex sección K.

K, y L_i serán ortogonales entre si y lo mismo para K, M_i.

$$V^2_1 + L^2_3+\ldots+L^2_k= K^2+L^2_{k+1}+\ldots+L^2_{n+1}$$

$$V^2_2 +M^2_3+\ldots+M^2_k= K^2+M^2_{k+1}+\ldots+M^2_{n+1}$$

Por otro lado

Substituyendo en $V^2_1 + V^2_2 + \ldots + V^2_k = V^2_{k+1} + V^2_{k+2} + \ldots + V^2_{n+1}$

$$V^2_1 +V^2_2+ L^2_3+\ldots+L^2_k +M^2_3+\ldots+M^2_k+ 2L_3 M_3+ \ldots+2L_k M_k= L^2_{k+1}+\ldots+L^2_n +M^2_{k+1}+\ldots+M^2_n+ 2L_{k+1} M_{k+1}+ \ldots+2L_n M_n$$

y restándole las dos ecuaciones anteriores queda

$$K^2= L_3 M_3+ \ldots+L_k M_k- L_{k+1} M_{k+1}- \ldots-L_n M_n$$

Y después de pocos cálculos también resulta

$$V^2_1= L_3 V_3+ \ldots+L_k V_k- L_{k+1} V_{k+1}- \ldots-L_n V_n$$

$$V^2_2= M_3 V_3+ \ldots+M_k V_k- M_{k+1} V_{k+1}- \ldots-M_n V_n$$

Generalizaciones del teorema del cateto y de la altura en R^n