GAMMA 8
xuño 2008

NOVAS PAVIMENTACIÓNS: A COR POR DISTANCIA, RECURSIVAS...

Manuel Díaz Regueiro
Centro de Formación e Recursos de Lugo

Resumo

Paul Ërdos dicía que a diferenza da física ou da bioloxía, as matemáticas son infinitas, non se acabarán nunca. Sen embargo na meirande parte das clases de matemáticas se ensinan pechadas, acabadas e pequerrechas, de modo que os alumnos nunca poderán albiscar a característica fundamental delas: o seu carácter aberto, creativo e construtivo. Modúlase e exemplifícase ese punto de vista cos mosaicos e pavimentos.

Abstract

Paul Ërdos stated that mathematics, unlike physics or biology, are infinite, they will never end up. However, in most math lessons mathematics are taught in such a closed, finished and small way that students will never be able to glimpse their fundamental feature: their open, creative and constructive nature. That point of view is modulated and illustrated in mosaics and pavings.

A arte de deseñar pavimentacións e padróns, é claramente moi antiga e ben desenvolvida. En contraste, a ciencia das pavimentacións e padróns, o que para nós significa o estudo das súas propiedades matemáticas, é comparativamente recente e moitas partes deste tema permanecen aínda por explorar.

Shepard e Grunbaum en Tilings and Patterns, A biblia matemática dos mosaicos

Os mosaicos experimentan e espertan a nivel educativo un gran interese desde hai poucos anos. Regulares, semirregulares, …, pero hai pouco máis que dicir. En realidade algo que está morto, acabado, non debería ser ensinado. Debería ser máis ben obxecto de museo que de clase. As clases deben estar vivas, con problemas vivos, algúns deles abertos, e con mentalidade viva e non forense. Cada xeración debe ter os seus propios problemas, abertos e interesantes. Así que esa manía de ensinar matemáticas absurdas e do pasado, para seleccionar mentes do pasado, polo tanto, e non mentes do futuro, debería acabar. En cada tema deberíamos buscar os aspectos vivos, interesantes. Qué de vivo podemos falar entón no tema dos mosaicos?

Calquera pensará, poderiamos falar dos mosaicos non periódicos, de Penrose (a portada de *GAMMA* 1), como fan moitos libros. De Escher, tamén, xa que demostrou que con pouco esforzo matemático un profano pode inventar no século XX novas formas e estilos de mosaicos. Certo, pero hai máis, podemos presentar máis, mosaicos de definición, con regras que os definen. Por exemplo, presento mosaicos de distancia que explicarei agora, mosaicos recursivos que veremos despois, ou mosaicos de evolución que son o resultado da aplicación de pequenas instrucións ou programas sobre un espazo de mosaicos. Un primeiro exemplo pode ser o mosaico resultante de aplicar un xogo da vida de Conway.

Este artigo vai recorrer máis as imaxes que a ningún tipo de texto. Pretendemos ensinar con imaxes máis que con mil palabras, pero algunha palabra teremos que dicir, vaia...

Por exemplo, falamos e definimos distancia, non no sentido matemático estrito, senón como un indicador numérico que relaciona dous puntos do plano e permite calcular exactamente un número para eses dous puntos.

Despois imos usar ese número como base do cálculo dunha cor, ben sexa en cadrados ou mosaicos base, ben sexa en pixels. Estamos polo tanto falando dun tipo pouco habitual nas clases de mosaicos, de mosaicos coloreados pola distancia a un centro.

Definimos unha distancia entre (x_1,y_1) e (x_2,y_2) que pode ser a euclídea

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

a suma de valores absolutos

$$d = abs(x_1 - x_2) + abs(y_1 - y_2)$$

a suma dos inversos dos valores absolutos

$$d = \frac{1}{abs(x_1 - x_2)} + \frac{1}{abs(y_1 - y_2)}$$

o produto $(x_1\text{-}x_2)(y_1\text{-}y_2)$, a suma $(x_1\text{-}x_2)+(y_1\text{-}y_2)$, a resta $(x_1\text{-}x_2)\text{-}(y_1\text{-}y_2)$, a suma harmónica

$$d = \frac{1}{\frac{1}{abs(x_1 - x_2)} + \frac{1}{abs(y_1 - y_2)}}$$

(ver "Entender as medias" en *GAMMA* 4)

Que está en formato píxel na portada das actas ou no cartel do IV Congreso de AGAPEMA en Betanzos.

No cartel mídese a distancia entre píxels e aquí estamos contando distancias como número de lados do cadrado base (contamos cantas unidades separan no eixo das X ou das Y).

Isto trae outro problema a colación: imos colorear dunha determinada cor cando as distancias a un determinado centro toman un valor determinado, pero se tomas como base unha malla hexagonal, como medimos as distancias entre hexágonos?, cal é o hexágono (-3,2)?, por exemplo.

No caso dos triángulos é algo máis doado, pois cada dous triángulos forman un paralelogramo ou sexa que podemos medir distancias como nunha malla cadrada, contando os paralelogramos de diferenza e tendo en conta a posición dos triángulos implicados.

Ben, o problema da distancia na malla hexagonal está ligado aos problemas dos xogos de imperios, pois estes utilizan mallas hexagonais para representar os espazos, as unidades mínimas son pezas hexagonais. Así que este tema podería motivar aos alumnos introducindo coordenadas hexagonais nos xogos, quizais creando de paso un xogo hexagonal.

Como non dispoñemos de infinitas cores provocamos un efecto de onda: cada 5 ou 6 cores volvemos a repetir as cores que marcan as distancias.

Se os mosaicos de base cadrada ou os mosaicos triangulares temos a posibilidade de debuxalos de modo que cubramos una base cadrada ou aproximadamente unha zona cadrada, na de base hexagonal será máis conveniente percorrer una zona circular polo que a definición de distancia máis apropiada podería ser o de número de aneis que rodean ao hexágono central, e despois o número correspondente ao percorrer ese anel desde, digamos, a posición norte. (Cada anel ten un número máximo na segunda coordenada, dependendo da primeira n, cal é a fórmula? $6n$?)

Así que poderiamos ter imaxes espectaculares en versión hexagonal e en versión cadrada. O mesmo que en imaxes píxel a píxel. Pero por esta vez falaremos só dos mosaicos con base cadrada.

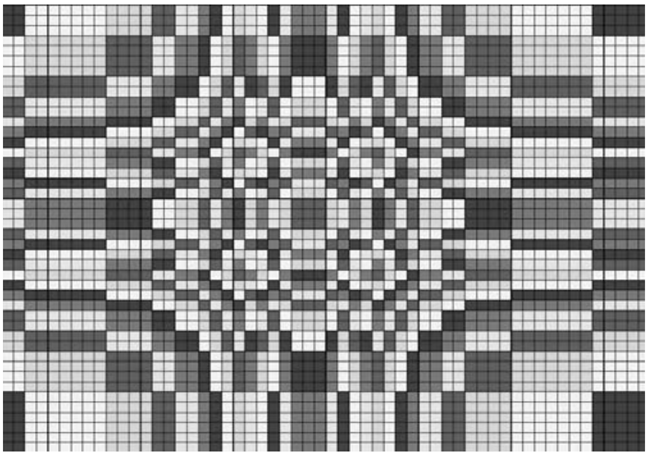

Fig. 1

Mosaico distancia a suma dos inversos dos valores absolutos

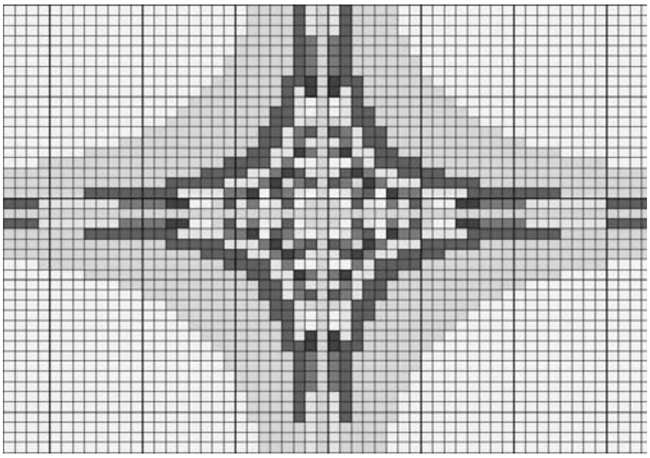

Fig. 2

Mosaico distancia inverso do producto dos valores absolutos

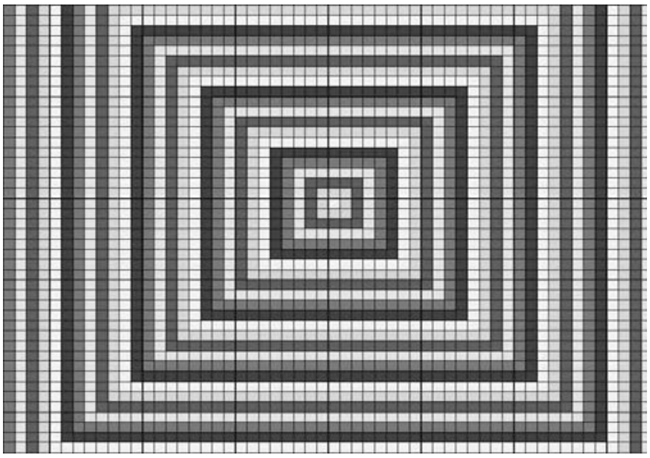

Fig. 3

Mosaico distancia máximo. Ah!, unha distancia matemática clásica, xa temos aos da Facultade contentos porque por fin atoparon unha utilidade! O efecto de color módulo 6 vese claramente nesa imaxe. Consideramos cores distintos para a distancia 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e despois repetimos as cores. Así a cor 12 será a mesma que a 6. Por que? pola limitación de ter que escoller unha cor para cada número, polo demais valería igual.

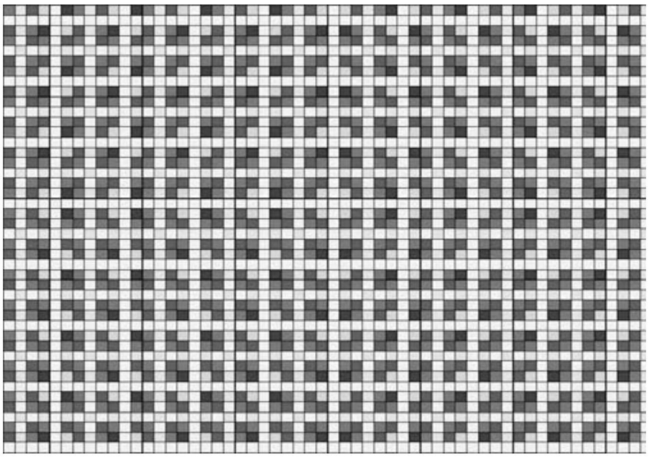

Fig. 4

Mosaico distancia produto. A cor de cada cadrado ven dada polo número resultante de multiplicar as distancias (número de cadrados) a un centro, tanto no eixo das X como no eixo das Y.

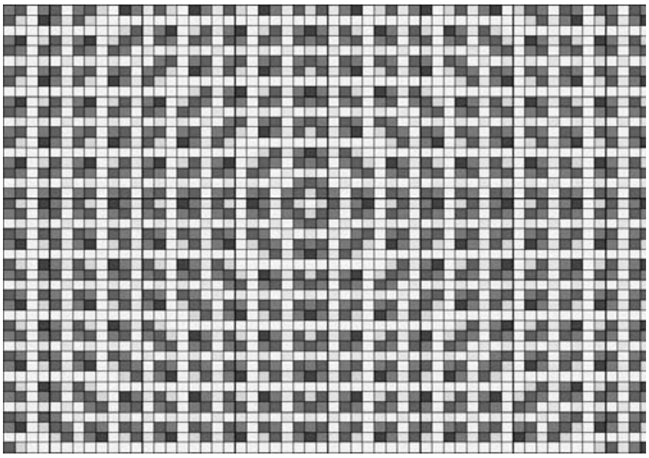

Fig. 5

Aquí mesturamos dúas distancias a máximo e a produto e as sumamos. Sáenos un mosaico que parece que, pola imaxe, ten o ADN das dúas distancias.

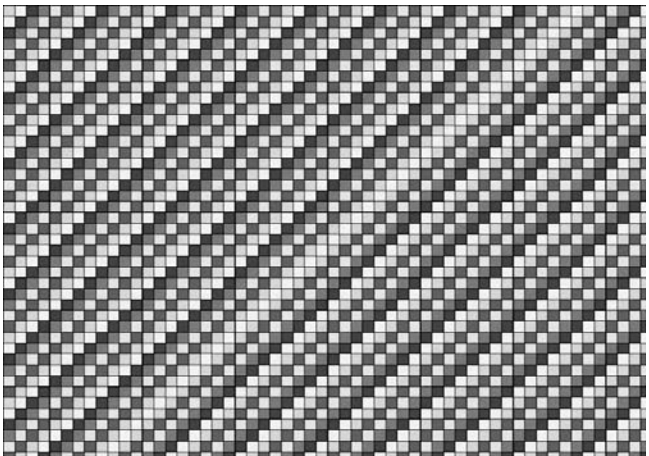

Fig. 6

A humilde resta tamén produce unha imaxe apreciable. A suma tería unha imaxe semellante coa inclinación na outra diagonal.

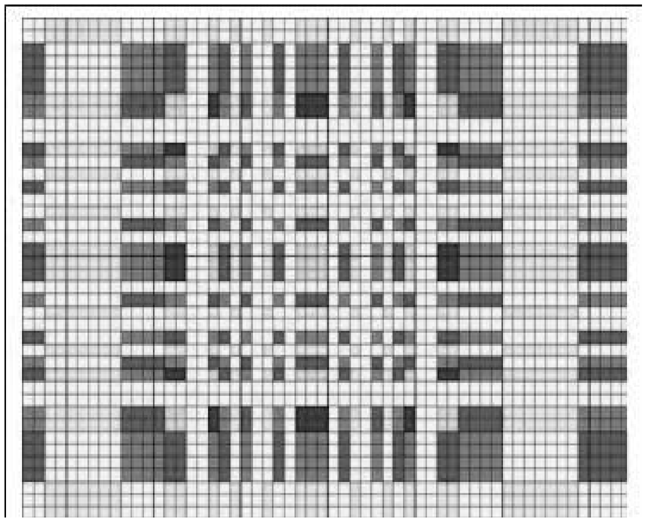

Fig. 7

Un bonito patrón feito coa función *k/abs(x)+k/abs(y)*.

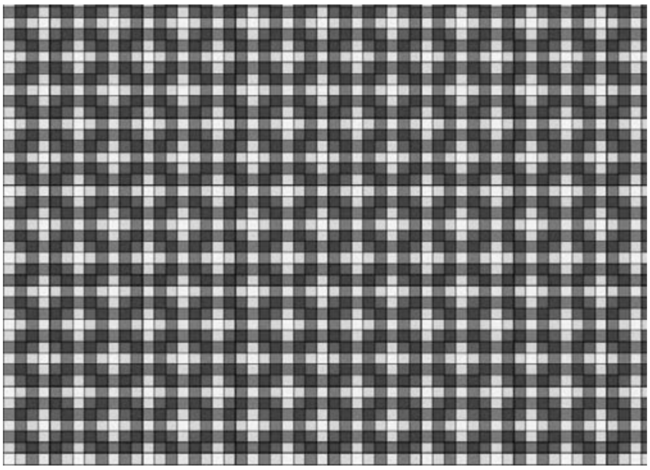

Fig. 8

A coñecida distancia cadrada $D=x^2+y^2$ expresada nun mosaico de base cadrado.

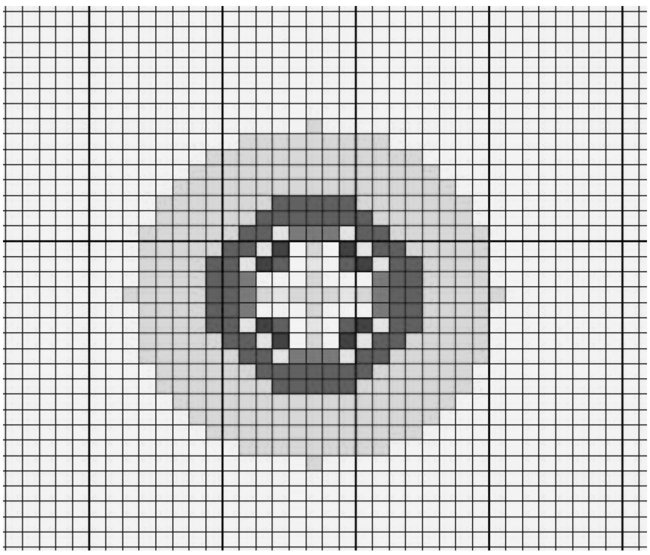

Fig. 9

A distancia inverso de suma de cadrados $D=k/(x^2+y^2)$

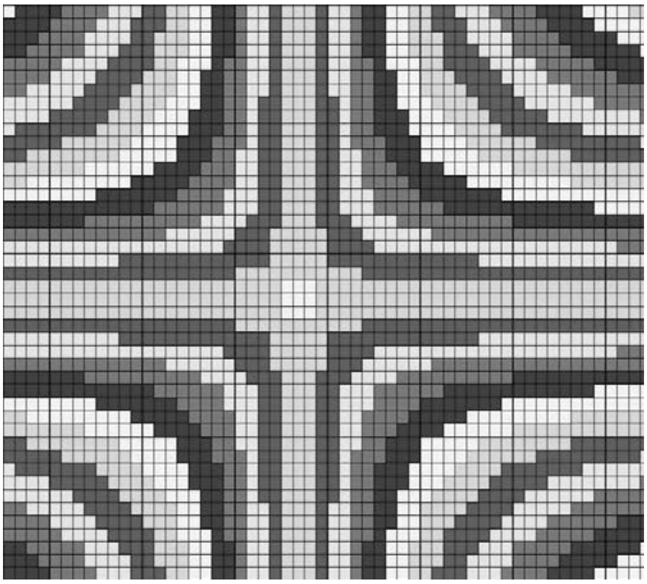

Fig. 10

Unha pavimentación de cadrados feita coa distancia suma harmónica de *abs*(*x*) e *abs*(*y*).

Máis e máis distancias... Que pasa se pasamos as figuras onde a distancia ven medida en píxels?...

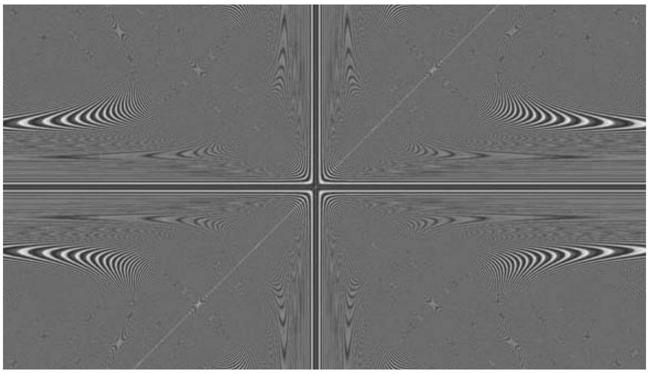

Fig. 11

Distancia suma harmónica de *x* e *y*, que non é exactamente igual ao do cartel do congreso, xa que no cartel hai unha aplicación iterada dúas veces da función número a cor, algo así como ncor(ncor(sumaharmón(*x,y*))).

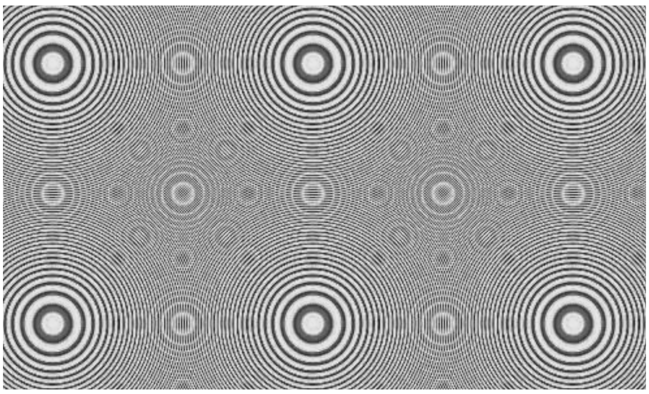

Fig. 12

A humilde e coñecida distancia euclídea ao cadrado dá esta imaxe que é a base doutra das portadas de *GAMMA*.

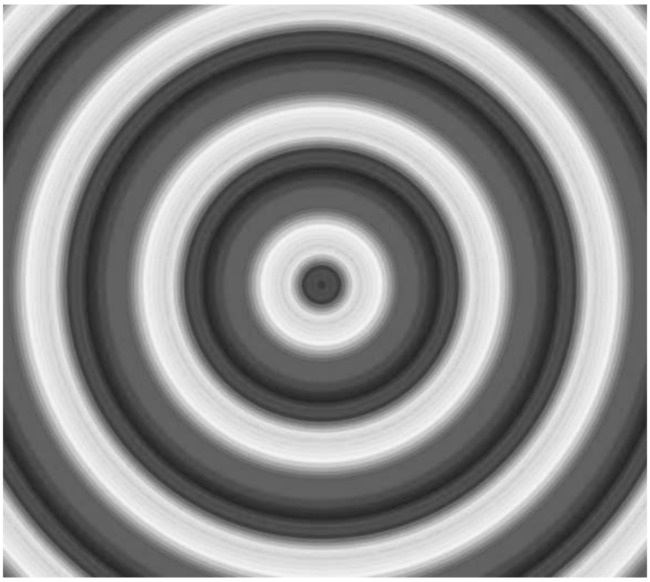

Fig. 13

Para rematar, como non!, coa superclásica distancia euclídea, imitando unha onda de cor. O centro, desde onde se miden as distancias, está clarísimo.

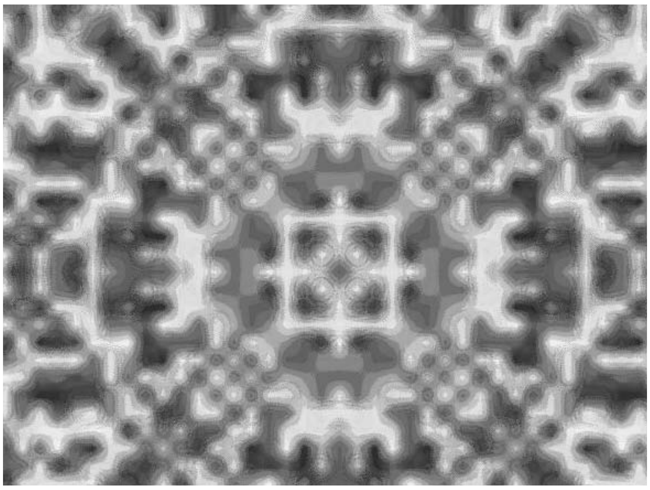

Fig. 14

En moitos destes debuxos aparecen, ao aumentalas, non figuras fractais, senón figuras "atómicas" de átomos de cor moitas veces con perlas ou irisacións de cor, formando "cidades" ou illas de cor como a que temos ao lado.

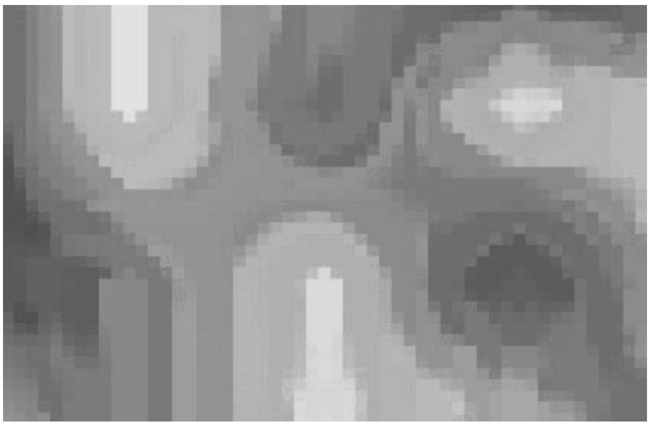

Fig. 15

OS 17 GRUPOS DE SIMETRÍA PLANOS

Os 17 grupos de simetría planos son unha forma algo ineficiente de crear imaxes espléndidas. Sen embargo quero subliñar o efecto de xerar a partir de este concepto imaxes especiais -estilo Alhambra-.

Así: se tomamos como figura base a un triángulo isóscele de 90º (Fig. 16) dá a figura 17, clásica no patrón cm e esta outra (Fig. 18), clásica da Alhambra, no patrón p4g.

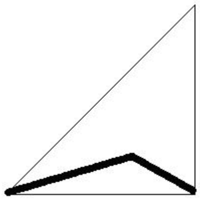

Fig. 16

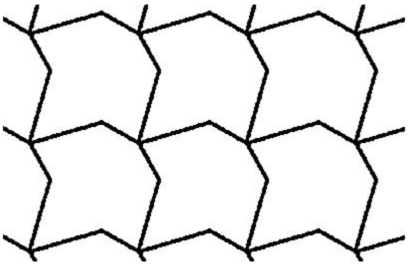

Fig. 17

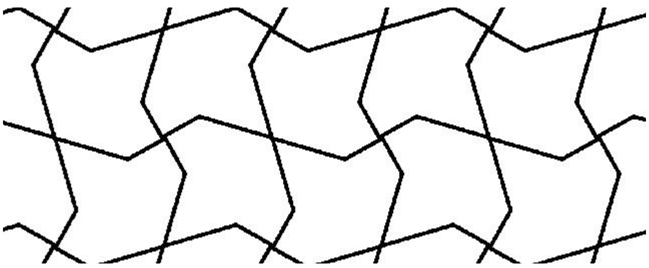

Fig. 18

Como se pode ver na foto (Fig. 19).

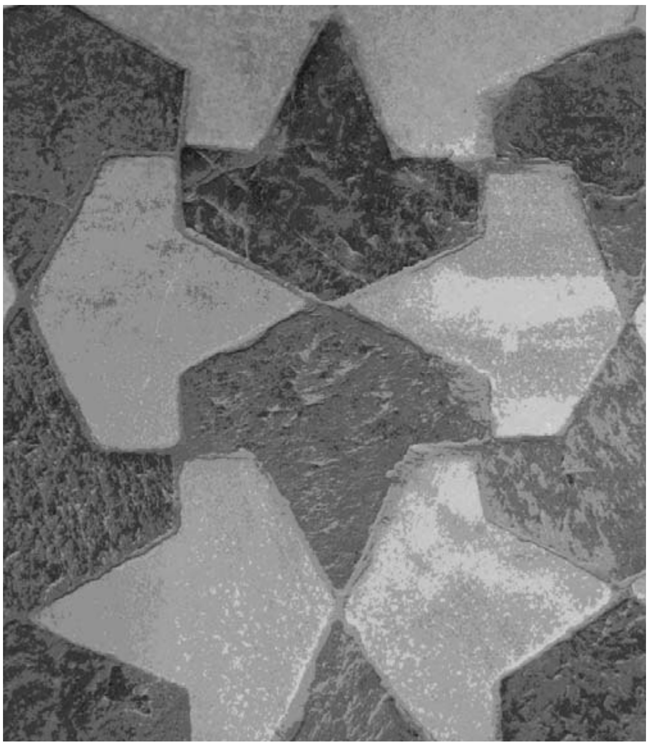

Fig. 19

Se cambiamos o punto de corte dentro do triángulo a figura varía lixeiramente (Fig. 20).

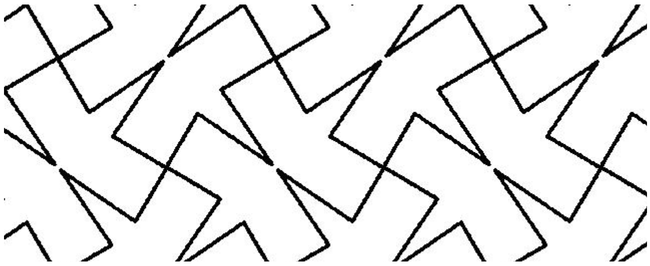

Fig. 20

Se tomamos como figura base a un triángulo isóscele de 120º (Fig. 21) e forma patrón p31m, dá a figura 22.

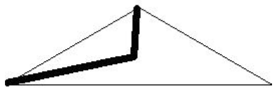

Fig. 21

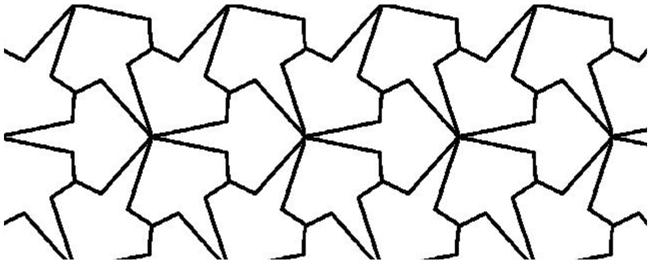

Fig. 22

Se tomamos agora como figura base a un triángulo isósceles de 90º (Fig. 23) e forma patrón p4g temos a da Alhambra, (Fig. 25), á que tamén poderiamos chegar como p4 tomando como base un cadrado e un cuadrante debuxado nel (Fig. 24).

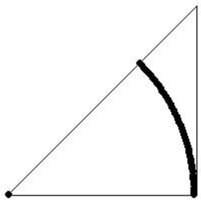

Fig. 23

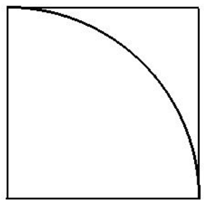

Fig. 24

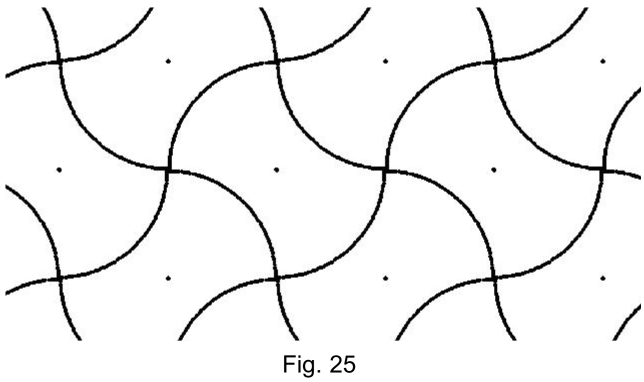

Fig. 25

Tomando como base un cadrado e un cuadrante debuxado nel co patrón p4g, obtemos a figura 26.

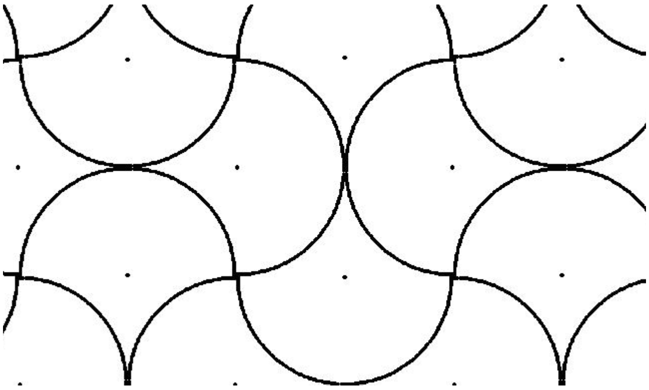

Fig. 26

Se agora escollemos como forma base o hexágono e trazamos un círculo, (Fig. 27), co patrón p3 obtemos a figura 28.

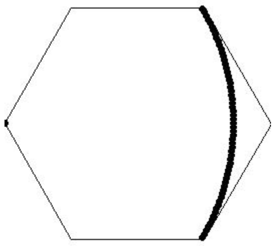

Fig. 27

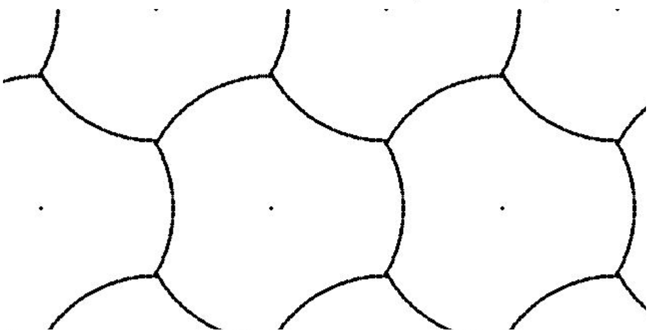

Fig. 28

Hai algo especial nesa figura de simetría p6, (Fig. 30), creada tomando unha simple liña no lado do triángulo equilátero base (Fig. 29).

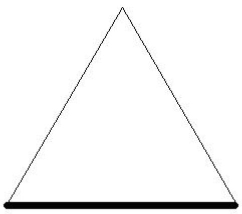

Fig. 29

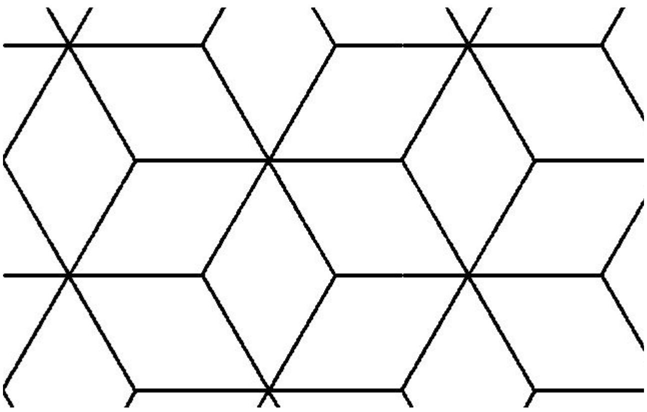

Fig. 30

Todos estes son exemplos de tomar puntos notables e curvas simples notables, para, usando un programa como o da bibliografía obter imaxes clásicas ou interesantes. Ese programa forma parte da exposición "Escher e Matemáticas" que estivo a percorrer Galicia no 2008. Por unha banda o éxito dos rapaces e raparigas co programa, a súa doada manipulación, sinalan a necesidade de facer matemáticas manipulativas e creativas. A necesidade de ver un teorema clásico enlatado nun programa que permite crear e por outro lado comprender a importancia das ideas matemáticas. O programa non existiría sen Galois, Fedorov e Polya. Así, serven para indicar a importancia aos alumnos desas creacións humanas marabillosas así como reparar neses puntos notables (baricentro, círculo de radio un lado do triángulo, etc.) que teñen un papel tamén desde o punto de vista artístico, como sinalei nos exemplos anteriores.

Aínda así, podemos ver por un lado a ineficiencia en xeral deste proceso creativo utilizando os grupos, é dicir o aspecto forense dese resultado matemático que responde en cambio perfectamente a preguntas como a partir dunhas liñas, dunha forma base, dun motivo mínimo, cantos mosaicos infinitos distintos podemos crear.

Un libro magnífico como o de Abas e Salman (1998) que pretende representar o motivo mínimo de máis de trescentas imaxes clásicas islámicas pode verse como un recurso interesante para usar co programa anterior, para descubrir a orixe, como grupo de simetría, de certas ornamentacións islámicas. Pero, ao mesmo tempo, serve para comprender o incomprensible e imposible que pode ser chegar a deseñar algún deseño islámico atendendo unicamente á teoría de grupos e a figura mínima.

Dito doutro xeito, a teoría de grupos non é quen de captar o estilo e a beleza dos mosaicos islámicos. Pode describilos, pero non sabemos moi ben o porqué.

O que acabamos de ver nos parágrafos anteriores é que certas liñas ou arcos en certas posicións claves dan figuras clásicas, sen embargo se un le a José Antonio Mora (1991) na **metade do cadrado** pode ver como hai aspectos construtivos máis eficientes de figuras artísticas e sen tanta teoría matemática detrás.

Pero non só a Mora, a Hankin, e moitos outros autores que describen métodos construtivos enxeñosos, algún deles descrito nesta mesma revista en pasatempos. Hai que dicir, non obstante, que o programa informático citado é un método construtivo, algo aleatorio, é certo. É dicir, a teoría matemática envolta nun programa informático xa empeza a ser creativa e construtiva por se mesma.

Como o artigo é xa suficientemente longo non profundarei sobre outros aspectos dos mosaicos como son os mosaicos recursivos. Outra vez será. Aquí simplemente dicir que tamén temos na Alhambra unha imaxe que ilustra mellor que mil palabras o que queremos dicir:

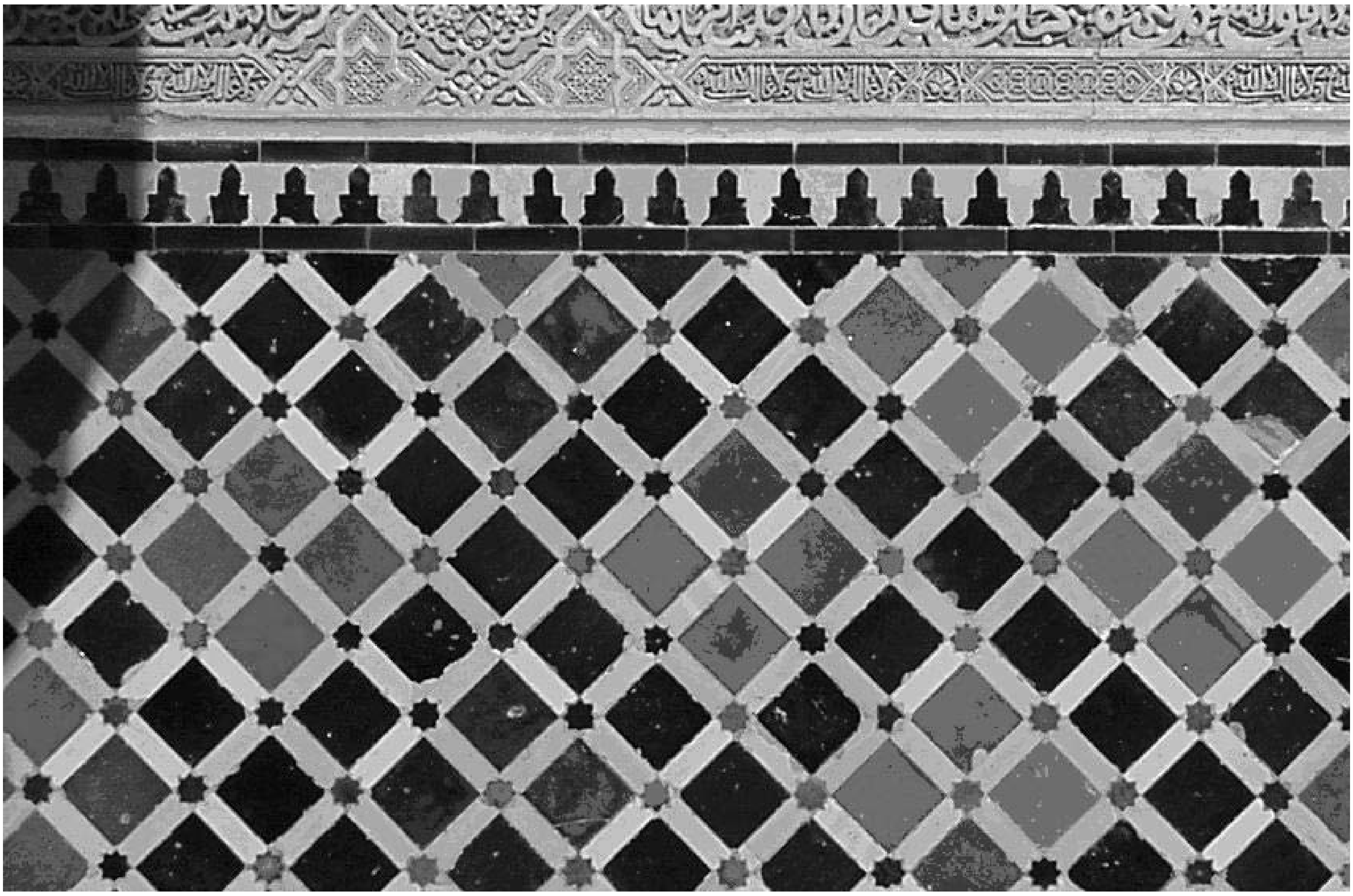

Fig. 31

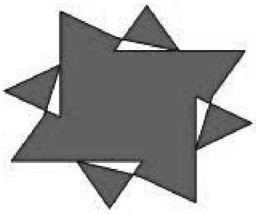

Fig. 32

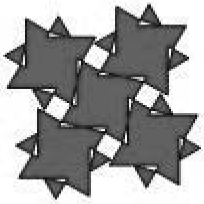

Fig. 33

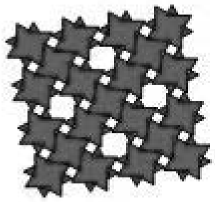

Fig. 34

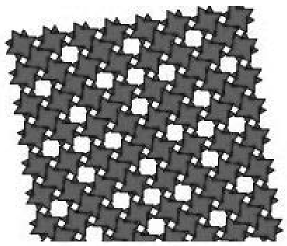

Fig. 35

Outras imaxes dun mosaico recursivo que ilustra un tipo de mosaico recursivo distinto, do que so queremos apuntar o proceso de creación, os pasos da recursión de 2 a 5, que son os mosaicos galegos.

Neste caso pode observarse a regra de xeración de figuras de recursión *n*: sobre unha primeira figura base colocamos catro figuras de recursión *n*-1 nas catro esquinas dun cadrado. Como esta é a primeira vez que se describe tal regra recursiva poderiamos denominala regra galega dos mosaicos galegos (Fig. 32, Fig. 33, Fig. 34 e Fig. 35).

Esta sinxela regra explica a notable fecundidade da súa descendencia, da multitude de imaxes xeradas. (Na espera de facer un monográfico descritivo de como van e como se xeran estes mosaicos, que agora xa acadan un maremagnum de 15000 deseños creados).

Para rematar, dúas citas, a primeira de Jablan (2002) sobre modulariedade: *Modulariedade ocorre cando varios elementos básicos (módulos) son combinados para crear un gran número de estruturas modulares diferentes. En arte diferentes módulos ocorren como a base dunha estrutura modular (exemplo, os ladrillos en arquitectura). Na ciencia búscase a modularidade a través da busca dos elementos básicos: constantes físicas, partículas elementais… proto-pavimentacións en diversas estruturas xeométricas, etc.). En varios campos da matemática discreta, a busca de modulariedade é o recoñecemento de conxuntos de elementos básicos, regras de construción e a derivación exhaustiva de estruturas xeradas diferentes.*

De novo, un experto en teoría de grupos como Jablan, nun libro que se caracteriza por estudar as figuras ornamentais clásicas de toda a humanidade desde a perspectiva da teoría de grupos, entende que falta algo que fale de elementos básicos, regras de construción e elementos interesantes deducidos. Hai un algo máis na construción de elementos ornamentais humanos.

Para entender este concepto de modulariedade, podemos ler un libro que vai máis aló e permite ver como construír e crear pavimentacións espectaculares como as vidreiras da súa páxina 338, o libro *Shape* de George Stiny (2006). Escrito por un non matemático, aínda que crea unha álxebra de figuras, demostra que con simples regras creativas -como regras para dividir un triángulo ou un cuadrilátero en dous- podemos chegar a imaxes das que é irrelevante a cal dos 17 grupos de simetría pertencen. Simplemente creamos unhas figuras estéticas, e introducímonos en problemas novos, imaxinativos e interesantes para os alumnos e para os profesores.

Se profundamos aínda máis e miramos o tema das formas cunha mirada científica distinta, como a de Jorge Wagensberg (2007), poderemos ler cousas como: *a competencia dos círculos polo espazo plano xera hexágonos. Son hexágonos por selección fundamental* ou ben: *a espiral empaqueta* que falan de que os patróns matemáticos son produto da natureza, sería conveniente sinalar aos nosos alumnos e alumnas a necesidade real e científica de tales formas, a súa natureza creativa real, aparecen porque teñen propiedades físicas notables. Non porque o **magister dixit,** como moitos profesores pensan. Ensinar tendo en conta a realidade (a do alumnado oínte e a realidade da natureza e contorno visible) debería ser un deber de todo profesor de matemáticas. É doado pensar e ver como moitos asentirán a afirmación ¡pero é que todo isto que conta non está no currículo! Un currículo que non ensina torres e castelos de radicais e relaciona arte e matemáticas, funcións de dúas variables... os alumnos teñen que usar ordenadores, deus meu, teñen que aprender como aprendín eu, todos os cálculos a man, a onde imos parar! Terán que codificar as cores asociando a cada cor un número que pode estar relacionado coa lonxitude de onda! Meu Deus!

Para amosar que nas preocupacións sobre un baleiro matemático nos estudos dos mosaicos e pavimentacións non estou só, citarei a Ivan Peterson (1992) no seu libro *El turista matemático:*

O matemático Branko Grünbaum, un experto nas matemáticas dos pavimentos, pronúnciase en favor das "contigüidades" (adjacencies) para definir os mosaicos e as formas cristalinas como unha alternativa ao método da teoría de grupos, tradicionalmente utilizada polos cristalógrafos e por outros investigadores. Mentres que a teoría de grupos resalta a importancia dos trazos xerais da simetría-rotatoria do patrón, o modelo das contigüidades adopta un enfoque local, detallando como se conecta unha peza coas súas veciñas. De feito, as leis da contigüidade xeran moitos patróns interesantes que non poden describirse por medio das simetrías e da teoría de grupos.

En certo modo, o método das contigüidades, aplicado ao estudo dos mosaicos, non é moi recente. Durante milenios os artistas e os artesáns crearon complicados deseños gratos á vista, así como modelos repetidos nas murais, nas tapicerías e nos tecidos, ademais de nas cerámicas, sen recorrer aos dogmas da teoría de grupos, baseándose nas súas propias regras e fórmulas empíricas, que indicaban sobre todo a maneira en que unha lousa ou debuxo se combinaba con outro. Unha vez escollidos os formatos das lousas e dos mosaicos, os modelos resultantes xa están preestablecidos.

Os matemáticos séguense encarando a outros retos. Xa saben que as leis da conxunción e da inflación para diversos tipos de lousas bidimensionais poden forzar a creación de patróns non de simetría quíntuple, senón de simetría óctuple e de doce partes. Existen outras posibilidades?

A mesma cuestión pode aplicarse aos debuxos tridimensionais, para cubrir espazos. É a forma icosaédrica a única que se produce en tres dimensións? Incluso os físicos, agora á busca de formas cristalinas aínda máis raras, pódense interesar por estas respostas. E que é o que ocorre se o xogo de "Life" se practicase sobre un mosaico de Penrose? Como poden modificarse as regras para que o xogo siga resultando interesante? As perspectivas son bastante confusas.

Bibliografía

ABAS, S.J.; SALMAN, A.S. (1998): *Symmetries of Islamic Geometrical Patterns*, World Scientific, Singapore.
DÍAZ REGUEIRO, M. (1997): Programa *Xerador dos 17 grupos de simetría planos*.
DÍAZ REGUEIRO, M. (1997): Programa *Mosaicos con distancias e evolutivos a cor*.
DÍAZ REGUEIRO, M. (2006): "Arabescos, mosaicos e tapices galegos", en *Actas do III Congreso de Educación Matemática de AGAPEMA*, Lugo.
GRÜNBAUM, B.; SHEPHARD, G.C. (1987): *Tilings and Patterns*, W.H. Freeman and Company, New York.
JABLAN, S.V. (2002): "Symmetry, Ornament and Modularity", *World Scientific*, Singapore.
MORA, J.A. (1991): "La mitad del cuadrado", *SUMA*, 8, 11-29.
PETERSON, I. (1992): *El turista matemático*, Alianza Editorial, Madrid.
STINY, G. (2006): Shape, *Talking about seeing and doing*, The Mit Press, London.
WAGENSBERG, J. (2007): "La rebelión de las formas", Tusquets, Barcelona.