GAMMA
setembro 2003

Entender as medias (2+2=5, (II))

Manuel Díaz Regueiro

Resumo. Diferentes tipos de medias teñen carta de natureza en matemáticas desde os pitagóricos, e son o resultado de facer unha media aritmética pero con aritméticas derivadas. Así e todo, as súas aritméticas non están recoñecidas, expresadas, nin son utilizadas en diferentes problemas, incluso elementais. Afírmase que a comprensión e a admisión de que estas aritméticas son "reais" e están en numerosos exemplos físicos, xa no ensino secundario, a admisión de que son naturais e imprescindibles en certos problemas, producen un resultado notable: unha maior economía de pensamento -que diría Mach-. Para isto percórrese un amplo camiño que vai desde a media das notas, pasando polas magnitudes derivadas ata as derivadas "derivadas".

Para entender as motivacións que me levan a facer este pequeno artigo, teño que sinalar que é un tema sobre o que, realmente, hai moito que dicir desde puntos de vistas moi variados. En primeiro lugar, e de forma sorprendente, o tema aparece xa na propia profesión de profesor. Cando facemos unha media de notas de clase, ¿que estamos a facer? ¿Por que unha media e non unha mediana? por exemplo.

A media das notas

Un tema tratado polos medios de comunicación este verán na nosa comunidade foi o das notas de matemáticas, en particular a baixa nota media de matemáticas dos alumnos na Selectividade. Á parte de que se poden facer moitas consideracións sobre este tema, a un pódeselle ocorrer facer unha media das notas que teña en conta o número de horas semanais dedicadas ás matemáticas nos anos de secundaria, e comparar as notas medias tendo en conta ese factor. Ou un segundo factor: a porcentaxe de poboación que se presenta á selectividade de entre todos os xoves da idade que corresponde á proba.

¿Como facelo? M=m*diversidade(% de poboación)/nº de horas semanais. Corrixide as táboas dos últimos 40 anos e verase que tanto os alumnos coma os profesores actuais gañan en perspectiva, agrándanse.

E isto aplícase non só a estas notas, senón ás de toda a primaria ou secundaria. É un feito contrastado que as notas de matemáticas son baixas. Pero o profesor de matemáticas non é un mago que explique os mesmos temas abstractos na metade de tempo no que se explicaban hai poucos anos e cunha diversidade de alumnos varias veces maior. En realidade, a ensinanza das matemáticas mellorou, o interese do profesorado pola Educación Matemática e pola mellora na súa profesión tamén, próbano os 200 asistentes ó Congreso de AGAPEMA en xuño e a mesma existencia de AGAPEMA e GAMMA.

Sen embargo, o feito é que, aínda tendo en conta estes aspectos, sería desexable que a ensinanza das matemáticas mellorase aínda máis.

Antibi (1988) ve as notas de matemáticas dunha maneira pesimista: "Así, a todos os niveis, pódese dicir que hai na nosa maneira de avaliar aos alumnos unha clase de constante: a proporción de malas notas". A esta constante chámaa a "constante macabra". ¿Que pasaría, pregúntase, se un profesor non dese nun curso unha nota menor de 12 sobre 20? Desde logo, podemos dicir, non sería coordinador de matemáticas da Selectividade.

Entre os profesores de matemáticas é relativamente frecuente atopar a medida educativa como magnitude intensiva. En realidade relacionada co concepto de que as "medidas" seguen unha distribución normal e, polo tanto, trátase simplemente de traducir as notas a uns datos de media 5 e desviación típica xeralmente 1 ou 2.

Ou, de modo máis xeral e máis recoñecible por todos nós, poñemos a nota de corte nunha certa cantidade. ”Este ano puxemos en setembro o aprobado en 3,2”, o cal vén dado porque en setembro os alumnos saben aínda menos có que sabían en xuño e debemos “baixar o nivel”.

Noutro caso, un presidente dun tribunal de oposición axusta as notas -baixas- de modo que o número de aprobados coincida exactamente co de prazas.

En xeral, supoñemos que con que as notas estean ben ordenadas xa son xustas: “Se aprobo este alumno, teño que aprobar outros dos”, “as notas da selectividade son baixas porque o exame estaba mal elaborado, pero todos están nas mesmas condicións, polo que dá igual”.

Se quixesemos medir tendo en conta a posición da nota de cada exame do alumno dentro das notas da súa clase, ¿cal sería a medida apropiada neste caso? Unha media numérica factible é calcular a media das posicións do alumno en cada exame da clase e asignarlle a nota correspondente ó alumno que ocupa esa posición na ordenación polas súas notas medias (ou un valor interpolado). Este é un primeiro exemplo, entre outros que aparecen no artigo, no que para un fenómeno natural temos dúas medidas factibles, escollemos unha delas como fundamental –priorizámola- e calculamos a media da magnitude secundaria en función da primaria.

A media do peso e a altura do alumno

En *Matemática e Educação*, de Nilson (2002), dedícaselle un capítulo a *Medida e Avaliação* no que nos conta como en análises de textos ingleses “medida” ten 40 significados distintos, e comenta o libro de Hardie *Truth and Fallacy in Educational Theory* (1942). Neste libro, Hardie cuestiona as bases teóricas da medida en Educación.

E clasifica as magnitudes en tres tipos:

-Magnitudes Intensivas

Exemplo, a dureza. Sabemos clasificar, ordenar os obxectos pola súa dureza, pero non lles asignamos un valor, ou este ten un sentido igual ao de numerar casas nunha rúa ou podería ser dado por letras do alfabeto. Se a única maneira posible de medir en Educación fose esta, di, a maioría dos cálculos que os educadores levan feito serían unha perda de tempo.

-Magnitudes fundamentais

Neste caso, ademais da posibilidade de ordenación das magnitudes debemos esixirlles a estas que sexa posible definir a “suma” no conxunto de tales magnitudes.

A lonxitude, masa, área, son exemplos de magnitudes extensivas fundamentais.

En Educación, Hardie, ve moi difícil situar as súas medidas entre as magnitudes fundamentais polo sentido que se lle pode dar á suma. “Reunir notas como as de gramática e redacción nunha única nota de Lingua resulta case tan significativo como sumar os pesos e as alturas dos alumnos e ordenalos polos valores suma de tales medidas” di Azanha en *Avaliação do rendimento escolar(1969).*

-Magnitudes derivadas

Dous exemplos ilustran estas magnitudes: a temperatura e a densidade.

Nestes dous casos pode establecerse a ordenación (máis quente, menos; máis denso, menos denso) e incluso definir unha escala para atribuír valores numéricos. Segundo Hardie, estas magnitudes caracterízanse porque existe unha fórmula (función) que relaciona a magnitude derivada con magnitudes extensivas fundamentais. No caso da temperatura PV=nRT; para a densidade d=m/v. A través de tales fórmulas serían posibles as medidas indirectas de T e d, utilizando as medidas das magnitudes fundamentais relacionadas. Hardie intúe que as medidas educativas son deste tipo, magnitudes derivadas, correspondendo a leis aínda por descubrir; e que pide non se demore o seu descubrimento.

Estas magnitudes derivadas, noutros libros chamadas **medidas indirectas**, estaban no centro do artigo “2+2=5” de *GAMMA* nº 1. En Hardy (1951), dise que se f é unha función continua e estrictamente monótona, ten unha inversa f^{-1} que satisfai as mesmas condicións, o que permite definir a media (sobre o intervalo no que se cumpren esas condicións) $M= f^{-1}(\sum f(a_i)/n)$ e, **poderiamos engadir, a suma** $S= f^{-1}(\sum f(a_i))$.

Poñamos un exemplo da clase, os problemas e exercicios de tarefas e esforzos compartidos -ou de billas para encher unha piscina- que temos costume de lles poñer aos nosos alumnos: sabemos que a realización de calquera traballo facilítase e acúrtase no tempo cantos máis medios se poñan nisto.

É dicir, que o tempo nestes problemas é unha magnitude derivada, e a súa suma segue a regra de que é menor que calquera dos sumandos $A\Delta B<A$; $A\Delta B<B$, para valores A, B, estrictamente positivos.

Se esta regra de suma é $A\Delta B=AB/(A+B)$, cumpre as condicións. Esta regra non é outra que $A\Delta B= f^{-1}(f(A)+f(B))$, sendo $f(x)=1/x$.

¿Resólvense así todos estes problemas? Si. Polo que ¿non sería mellor declaralo así?

Ou sexa, que temos tres situacións posibles, para valores A, B positivos:

1-$A\Delta B>A$; $A\Delta B>B$. Suma habitual, magnitudes fundamentais, proporcionalidade directa. Exemplos, a lonxitude, a área, o volume, a masa, etc... a suma é arquimediana. Aplícase a resistencias colocadas en serie. Se a magnitude é derivada, os exemplos poden ser $f(x)=x$, $f(x)=x^2$; $f(x)=x^3$, $f(x)=\ln(x)$ (se *a*, *b* son maiores que 1, no caso que *a*, *b* fosen menores que 1, ou un maior e outro menor que 1, estariamos no caso 2), $f(x)=e^x$,(*a, b* positivos, se son negativos, caso 2) e, como caso xeral sempre que f^{-1} sexa crecente e f tome valores positivos, pois entón de $f(B)+f(A)>f(A)$, deduciremos que $A\Delta B>A$, (ídem para B), ou ben que f^{-1} sexa decrecente e f tome valores negativos, pois entón de $f(B)+f(A)<f(A)$, deduciremos que $A\Delta B>A$, (ídem para B),...

2- $A\Delta B<A$; $A\Delta B<B$. Como na suma $A\Delta B=AB/(A+B)$, xa que $ab/(a+b)<a$ e menor que *b*, un caso de magnitudes derivadas, e en proporcionalidade inversa. Esa suma é non arquimediana. Aplícase a resistencias colocadas en paralelo.

Suma do tipo $A\Delta B= f^{-1}(f(A)+f(B))$, A e B son magnitudes derivadas doutras fundamentais mediante a función f. Exemplo, tempo en exercicios de esforzos compartidos; outros exemplos poden ser $f(x)=x^{-1}$, $f(x)=x^{-2}$; $f(x)=x^{-3}$, $f(x)= \exp(-x)$, $f(x)=\exp(1/x^2)$, ou tamén se f^{-1} é decrecente e f toma valores positivos, pois entón de $f(B)+f(A)>f(A)$, deduciremos que $A\Delta B<A$, (ídem para B), ou.....

3-$A<A\Delta B<B$. Este caso non se pode dar para funcións f estrictamente crecentes ou decrecentes e continuas, posto que implicaría que (se f é crecente) $f(A)<f(A)+f(B)<f(B)$, de onde deducimos que $f(A)<0$ e $f(B)>0$. Se A e B son puntos próximos e f é continua, isto non sería posible.

Esta análise contrasta coa de "La estructura de los conceptos científicos" de Mosterín. Nel divide as magnitudes só en intensivas e extensivas (aditivas), se ben fala de metrización fundamental e derivada. Pero o mellor exemplo de confusión entre formalismo e realidade dáse ó falar da resistencia eléctrica. Que é unha magnitude aditiva cando colocamos resistencias en serie e "non sería aditiva se as colocasemos en paralelo. As resistencias en serie adiciónanse, en paralelo non". Como diría Francis Bacon, os libros deben seguir ás ciencias e non as ciencias aos libros.

Problemas harmónicos

A media harmónica é presentada en Rittaud (2002) desta maneira ¿Cal é a relación entre unhas colas de atención a clientes, un circuíto eléctrico e os acordes musicais? Resposta: son tres tipos de problemas que se solucionan pola media harmónica.

Pero é en *Viagem de Ida e Volta*, un precioso libro de Paulo Abrantes, onde se suxire que esta media está no trasfondo da solución de problemas de viaxes de automóbiles, acordes, enchido de tanques, e outros moitos problemas – seis dos cales proceden dun artigo de Usiskin en *Mathematical Teacher*. É máis, este libro poderiámolo completar se incluisemos problemas nos que a solución se calculase non con a media harmónica senón coa suma harmónica: "se un obreiro fai unha obra en 10 horas e outro en 8 horas, ¿en canto tempo a realizan traballando conxuntamente?"

Paulo descríbenos no seu libro como esta media harmónica está no centro da resolución de numerosos problemas, pero ademais cóntanos como a primeira idea ou solución dos alumnos é que a solución se calcula como unha media.

Paulo, pois, afirma claramente que hai que lles ensinar aos alumnos que toda esta colección de problemas ten unha estructura común que a percibe como unha regra ou unha técnica que debe ser explicada despois de presentar os distintos problemas. Quizais en sesións do tipo "o problema da semana".

Neste punto difiro de Paulo. Suxiro presentar sen ambaxes, directamente, a noción de suma harmónica, e polo tanto de media harmónica, para a continuación resolver como exemplos todos os problemas nos que este tipo de suma ou media son útiles. Porque se trata, como na álxebra de resolución de ecuacións de primeiro grao, de mecanizar unha serie de procedementos polos que chegamos á solución "supón que a solución é x, chámalle x" e despois empregar un procedemento de cálculo de solucións de ecuacións. Neste caso os pasos serían estes:

Analiza as magnitudes que interveñen: ¿Cales son as magnitudes fundamentais? ¿Hai magnitudes derivadas? A magnitude derivada, ¿é inversamente proporcional a unha fundamental? ¿Hai que sumar ou promediar magnitudes derivadas? Se a resposta a todas estas preguntas é que si, resolve o problema coa suma ou a media harmónica.

Desde logo, responde mellor á idea intuitiva dos alumnos de que o problema é un problema de suma ou media. E bastaría con explicar detalladamente a orixe desta suma nun -o primeiro- dos exemplos.

Pero é que ademais todo o dito suxire que é aplicable, con certos matices de detalle que habería que sinalar e coidar, en cada caso, ás magnitudes derivadas segundo unha lei ou función calquera. Despois de ler estas liñas supoño que non será difícil responder a esta pregunta: se mesturo unha cantidade igual de dúas solucións de pH 7 e 3, ¿cal é o pH da solución mesturada? Para responder inmediatamente, a media de pH, que non é cinco senón

$$pHm = -\log\left(\frac{10^{-7}+10^{-3}}{2}\right)$$

. Ou que a mestura de 4 litros de pH 7 e 2 de pH 3 dan unha solución de

$$pHm = -\log\left(\frac{4*10^{-7}+2*10^{-3}}{6}\right)$$

Xa que pH=-log([H^+]), obtense o resultado despexando as concentracións, sumando e dividindo polo número de litros total, pois é unha concentración, pero aquí proponse "ver" o resultado de forma inmediata.

Outro exemplo; sabendo que M=0,67*log E-7,9, M é a magnitude na escala de Richter e E é a enerxía liberada, se ocorren dous terremotos simultáneos na mesma zona, de magnitudes 5 e 4, ¿cal é a magnitude do terremoto percibido como conxunto?. Resposta inmediata,

$$MR = 0,67\log\left(10^{\left(\frac{4+7,9}{0,67}\right)}+10^{\left(\frac{5+7,9}{0,67}\right)}\right)-7,9 = 5,0092136$$

Ou a medida en decibelios da suma de dous sons de valores 60 e 60 db

$$DB = 10\log\left(10^{\frac{60}{10}}+10^{\frac{60}{10}}\right) = 63$$

-Un resultado de triángulos poderíase enunciar así: a altura dun triángulo sobre un dos seus lados é igual á medida dese lado pola *suma harmónica* das tanxentes dos ángulos do triángulo formados por ese lado.

-Nunha álxebra de Boole, calquera das operacións pode ser definida en función da outra e o complementario (a función f e a súa inversa aquí); así, a*b=(a'+b')', polas leis de Morgan. En conxunto, estes exemplos proban que as aritméticas derivadas si que están na secundaria.

Propiedades da media aritmética

"A media está entre o mínimo e o máximo dos valores" que ás veces se confunde polos alumnos na propiedade de que a media está no medio dos valores; o cal é certo se son 2 valores para os que se calcula a media ou se é unha distribución simétrica.

En Batanero (2002) trátase un dos aspectos sobre os cales podería derivarse todo o artigo: *de Como os alumnos entenden as medias*, e este é un dos temas que trata, entre outros aspectos clarificadores do concepto de media. Vense 5 tipos de problemas dos que a resolución desvela se comprendemos ou non a media aritmética en toda a súa amplitude.

Ideas e preguntas que non trata ese artigo e que poderían ser interesantes son:

1- ¿Que é o que fai a media aritmética tan intuitiva e natural para a meirande parte dos alumnos?

2.-A media é unha función homoxénea e simétrica dos valores. Que ademais é invariante á simetría ou xiros de centro a media, ás translacións no sentido de que a media dos puntos trasladados é a media trasladada, e ás homotecias (no mesmo sentido que as translacións). Estas propiedades xeométricas, ¿poderían usarse para unha mellor aprendizaxe das propiedades da media polos alumnos, mediante visualizacións? ¿É importante a propiedade da media sinalada en *Suma de distancias ao cadrado* de Rovira (2002), dado o seu compoñente xeométrico?

Entender ou ofuscar

Contaba Enrique Vidal, nas Xornadas de Debate de AGAPEMA en Santiago no 2002, que un de nosos compañeiros de estudios na Facultade definía facer matemáticas como facer algo que non se entende. Ou sexa, que se fan matemáticas cando o que se fai non se entende. Ou que un non fai matemáticas se o que fai se entende. Que ten tres interpretacións, a benévola, que sería que posto que estamos na fronteira dos nosos coñecementos, estamos resolvendo auténticos problemas, pero para o que estamos facendo non logramos –de momento– xustificación, polo que o estamos facendo a modo de exploración, sen unha forte xustificación. A interpretación literal: fanse matemáticas cando formamos parte dun grupo de persoas que está a facer cousas novas pero ningunha delas sabe ou entende o que está facendo nin se ten perspectiva de para qué serve. E unha interpretación malévola: trátase de ofuscar o que se escribe para que non haxa ninguén con capacidade de recoñecer as trivialidades “cocotolóxicas” que contén (ver Pasatempos, neste mesmo número).

Contra esta interpretación levantaríase ata o mesmísimo Pitágoras, o definidor de “matemáticas”: para el, matemáticas era o que se aprende, polo tanto o que se entende; ou sexa, o conxunto de ferramentas lóxico-deductivas que nos axudan ou permiten entender o mundo.

Para un grego todo aquilo que non servise para entender mellor o mundo non serían matemáticas. Todo aquilo que non aportase luz e claridade, entendemento, a unha situación física ou matemática non sería máis que unha perda de tempo, desde logo non digna de aprenderse e, polo tanto, de ser matemáticas. Un último argumento a favor da necesidade de claridade e entendemento das matemáticas, o dá a lei da inutilidade das probas complexas de Vladik Kreinovich e Luc Longpré: demostraron (Delhaye 2002) que se un resultado é potencialmente útil, non é posible que teña unha proba complexa.

É por isto que neste artigo se trata de facer matemáticas do máis alto nivel, das que se entenden e case calquera pode entender perfectamente. Admitindo que haxa persoas que teñan a opinión contraria.

Todos sabemos unha serie de resultados sobre distintas clases de medias: aritmética, xeométrica, harmónica, cuadrática, de raíz enésima. Sabemos que existe unha relación de orde entre elas, e podemos demostrar algúns resultados máis sobre elas.

Pero o que se pretende demostrar ou mostrar neste artigo é a contestación a estas preguntas: ¿De onde veñen e que significan esas medias? ¿Por que son medias, por que funcionan tan ben como medias?. ¿Que outro tipo de medias podemos presentar, polo tanto? ¿Axúdannos a entender a aritmética de 2+2=5, a suma de velocidades relativística?

¿Axúdannos a entender?

Empezaremos pola última pregunta.

Entendamos a media cuadrática $m_2 = \sqrt{\dfrac{l_1^2 + l_2^2}{2}}$

, e para isto esbozamos a situación seguinte:

Temos dous cadrados A_1 e A_2 de lados l_1 e l_2, e preguntámonos pola existencia dun cadrado media dos dous propostos inicialmente (poderían ser n en vez de 2, pero iso non mellora o razoamento e complica a notación).

E agora é cando tomamos a decisión fundamental: ¿como facemos o cadrado media, tomando un cadrado de lado a media dos lados ou tomando un cadrado que tivese de área a media das áreas dos cadrados? Se tomamos a primeira opción o cadrado media ten de área

$$A_m = \frac{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2}{4} = \frac{(l_1 + l_2)^2}{4}$$

que si, evidentemente, é unha área media aos dous cadrados orixinais, pero se tomamos a segunda opción aínda é máis natural -sóanos máis e é a media aritmética da súa medida natural, das súas áreas- a media que usamos- neste caso

$$A_m = \frac{A_1 + A_2}{2}$$

a área media é a media aritmética das áreas que interveñen.

A continuación preguntarémonos cánto vale o lado dese cadrado de área media “natural”.

E faremos o seguinte razoamento elemental:

$$\frac{A_1}{l_1^2} = \frac{A_2}{l_2^2} = \ldots = \frac{A_n}{l_n^2} = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2} = \frac{(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)/n}{(l_1^2 + l_2^2 + \ldots.. + l_n^2)/n} = \frac{A_m}{l^2}$$

de onde $l = \sqrt{\dfrac{l_1^2 + l_2^2 + \ldots. + l_n^2}{n}}$

o cadrado de área natural media ten de lado a media cuadrática dos lados dos cadrados. É unha media porque se refire á propiedade característica fundamental dun cadrado, o seu lado, e tomamos a media aritmética da súa medida fundamental, das súas áreas.

Se repetimos o razoamento para n cubos, chegariamos á conclusión de que o cubo medio ten de lado a media cúbica dos lados dos cubos.

$$l = \sqrt[3]{\frac{l_1^3 + l_2^3 + ... + l_n^3}{n}}$$

Para unha serie de hipercubos en R^4 o hipercubo medio terá de lado

$$l = \sqrt[4]{\frac{l_1^4 + l_2^4 + ... + l_n^4}{n}}$$,etc, etc...

Ó mesmo resultado poderiamos chegar se a media é a xeométrica ou a harmónica, pero ímola pensar de modo xeral:

Sexa un fenómeno natural, ou un obxecto matemático con dúas medidas sobre dous aspectos relevantes do obxecto ou ente que se quere estudiar. Unha medida máis relevante M e unha medida menos relevante m relacionadas da forma $M=kf(m)$ onde f é unha función con inversa f^{-1}. Tamén podemos presentalo así: un obxecto cunha medida accesible, medible, m e cunha propiedade derivada, $M=kf(m)$, da que só podemos ter medidas indirectas. Queremos definir a media de m a través da de M.

Se temos n obxectos ou entes con medidas $M_1, M_2, \ldots M_n$. De aquí

$$\frac{M_1}{f(m_1)} = \frac{M_2}{f(m_2)} = \ldots = \frac{M_n}{f(m_n)} =$$

$$\frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_n}{f(m_1) + f(m_2) + \ldots + f(m_n)} =$$

$$\frac{(M_1 + M_2 + \ldots + M_n)/n}{(f(m_1) + f(m_2) + \ldots + f(m_n))/n} = \frac{M_{media}}{f(m)}$$ de onde

$$f(m) = (f(m_1) + f(m_2) + \ldots + f(m_n))/n$$

$$m = f^{-1}((f(m_1) + f(m_2) + \ldots + f(m_n))/n) \text{ ;}$$

ou sexa, que é a medida segunda do obxecto medio, do que vén definido pola media aritmética dos n valores da súa medida principal, M. Nos exemplos anteriores $f(x)=x^2$; $f(x)=x^3$,...

Elaboremos un exemplo algo máis complicado: supoñamos esferas de igual radio compostas por varias substancias de densidade d_i menor que 1 e que polo tanto flotan na auga. Consideremos a área do círculo que é visible por encima da auga como medida principal M_i do obxecto i e d_i como medida secundaria. Así $M_i=f(d_i)$; poderiamos calcular a densidade d da esfera que presentase unha área media por riba da auga e esta calcularíase pola fórmula da "media" correspondente ó problema.

Entendendo a definición de suma de magnitudes derivadas

Pero tamén estaremos entendendo os isomorfismos de R que se contaban no artigo 2+2=5.

Volvemos ó punto no que temos dous cadrados A_1 e A_2 de lado l_1 e l_2 e buscamos unha suma distinta para l_1 e l_2 isomorfa á suma normal de R.

Definimos a suma de l_1 e l_2 como o lado do cadrado de área a suma das áreas dos cadrados de lados l_1 e l_2. Así, estamos definindo a operación

$$l_1 \Delta l_2 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$$

Ou, noutros casos, $l_1 \Delta l_2 = f^{-1}(f(l_1) + f(l_2))$,

E agora rescribiremos: Sexa un fenómeno natural, ou un obxecto matemático con dúas medidas sobre dous aspectos relevantes do obxecto ou ente que se quere estudiar. Unha medida máis relevante M (posto que queremos preservar a súa aritmética) e unha medida menos relevante m relacionadas da forma $M=kf(m)$ onde f é unha función con inversa f^{-1}. Definimos a operación suma sobre a medida m a través da medida M como $m_1 \Delta m_2 = f^{-1}(f(m_1) + f(m_2))$

Por exemplo, $u\Delta v=\tanh(\text{arctanh}(u/c)+\text{arctanh}(v/c)).c=$

$$\frac{(\tanh(\text{arctanh}(u/c)) + \tanh(\text{arctanh}(v/c))).c}{1 + \tanh(\text{arctanh}(u/c)).\tanh(\text{arctanh}(v/c))} = \frac{u+v}{1 + \frac{u.v}{c^2}}$$

na velocidade da luz sendo f(u)= arctanh(u/c) e tratamos de preservar c como velocidade máxima, como medida máxima de velocidades; $f(u)$ é a medida da que se preserva a aritmética, máis relevante da velocidade u, mentres que o propio valor de u é menos relevante (non se conserva a aritmética), contra a idea habitual. Dito doutro modo, parece ser que a velocidade é unha medida derivada, que só podemos calcular arctanh(u/c) (en realidade, cando u é pequena as dúas medidas son practicamente as mesmas) e de aí definir a suma de velocidades.

Pero seguimos coas medias

Teorema 1. A media

$$m = f^{-1}((f(m_1) + f(m_2) + ... + f(m_n))/n)$$

ten as propiedades seguintes:

A "suma" das "desviacións" de cada valor á media é "nula".

$$\sum{}' m_i -' m = \sum{}' f^{-1}(f(m_i)) - f^{-1}((f(m_1) + f(m_2) + ... + f(m_n))/n) =$$
$$f^{-1}((f(m_1) + f(m_2) + ... + f(m_n)) - (f(m_1) + f(m_2) + ... + f(m_n))) = f^{-1}(0)$$

A ' é unha indicación de que as operacións suma, resta, etc, non son as habituais, senón as derivadas.

Ex. trivial. A media xeométrica m cumpre $m/m_1...m/m_n=1$.

2) A media dos "productos" das "desviacións" á media por si mesmas faise mínima para a media e igual á obtida tomando as "desviacións" a un valor calquera x, menos o "producto" da desviación de x á media por si mesmo.

Como indicación, a media fai mínimo o valor de

$$\sum{}'(m_i -' m)^{2'} = \sum{}' f^{-1}((f(m_i) - (f(m_1) + f(m_2) + ... + f(m_n))/n)^2) = ...$$

Os puntos suspensivos aquí indican que en realidade seguiriamos a demostración habitual, pero tendo en conta que o facemos para unha definición de suma e multiplicación derivada.

Ou sexa que, por exemplo, a media xeométrica fai mínimo o valor de

$$I = \sum \ln^2\left(\frac{m}{m_i}\right)$$

¿De onde sae I? De transformar $\sum (m_i - m)^2$ tendo en conta que a suma convértese nun producto, a resta nun cociente e a multiplicación x.y en x^ln(y)=y^ln(x) cando f(x)=ln(x), que é a función que converte (ou relaciona) a media xeométrica en aritmética. Ademais, tomamos o logaritmo neperiano dese producto para podelo derivar (ou para pasar o resultado de R' en R). É dicir

$$\ln\left(\prod\left(\frac{m}{m_i}\right)^{\ln\left(\frac{m}{m_i}\right)}\right) = \sum \ln^2\left(\frac{m}{m_i}\right)$$

Ímolo demostrar, para un maior convencemento,

Derivamos respecto a *m* a expresión

$$\frac{dI}{dm} = \sum 2.\ln\left(\frac{m}{m_i}\right)\left(\frac{m_i}{m}\right) * \frac{1}{m_i} = \frac{2}{m}\sum \ln\left(\frac{m}{m_i}\right) = 0$$

E igualamos a cero para calcular o mínimo.

De onde

$$\ln\prod\frac{m}{m_i} = 0 \;\Rightarrow \prod\frac{m}{m_i} = 1$$

ou sexa, que a media xeométrica anula a derivada de I, e, ademais ó substituíla na derivada segunda de I dá un número positivo polo que é un mínimo.

Por último, estes exemplos suxiren que unha mellor comprensión e familiaridade coas magnitudes derivadas poden axudarnos a predicir resultados, a ter un certo "metacoñecemento" que pode dar certa vantaxe na resolución de certos tipos de problemas. Esta vantaxe enunciareina como **Metateorema**: Escolle o enunciado dalgún teorema apropiado para a aritmética de +,x habitual (preferiblemente de funcións reais), transfórmao nun enunciado dunha aritmética derivada e (salvo cambios naturais) terás un novo teorema certo.

Unha explicación currente calamo pode facerse así: Creamos un isomorfismo de R en R, con operacións distintas; calquera enunciado no R ordinario, mediante o isomorfismo transfórmase nun "enunciado" de R coas outras operacións. Se todos os pasos das operacións de demostración do primeiro enunciado podemos substituílos por pasos equivalentes na demostración do segundo, logo é posible demostrar o segundo.

Un camiño que nos permitirá chegar a novos teoremas, seguramente triviais.

Invitamos ó atento lector a descubrir algúns deles que sexan interesantes. Como exemplo para animar, ademais do xa citado da media xeométrica presento o seguinte, apropiado só para os afeccionados ó Derive :

Definamos o $\lim_{h\to 1}\left(\frac{f(xh)}{f(x)}\right)^{1/\ln h}$

(que sería a transformación da definición de derivada pola función ln(x)). A simple vista xa se pode ver que esta cumpre que D'(f.g)=D'f.D'g, como era previsible, pero ademais, utilizando Derive podemos comprobar que D'f'=e^(Df)[ln(x)], sempre que saibamos transformar *f* en *f'*, claro. Por exemplo, f(x)=x^n transfórmase en f'(x)=e^(ln(x))^n.

En xeral, estas derivadas "derivadas" defínense D'g(x)=lim (g(x+'h)-'g(x))/'h cando *h* tende a $f^{-1}(0)$ e teñen regras como D'g'= f^{-1}(D(g))[f(x)] e que D'(pΔq)=D'pΔD'q.

¿Que significa sen(x) na aritmética derivada, e como se traduce sen(x) a unha función equivalente na aritmética derivada? ¿Que pasa coas ecuacións diferenciais, series de Taylor, integrais, toda a análise "derivada", co seu significado físico? ¿Como mellora a comprensión do concepto de derivada? ¿Que significa *D'f=0*? ¿Hai algún problema máis facilmente resoluble nunha aritmética derivada? Miles de preguntas xorden dun só exemplo.

No fondo, un complicado xogo de transformacións de variable, pero que recobra o seu valor ó pensar no que nos costa adaptarnos ó cambio ó euro.

Bibliografía:

Abrantes, Paulo (1988), *Viagem de ida e volta*. Lisboa : APM.

Antibi, André (1988), "Une suggestion pour combattre la 'constante macabre' ", en *Thèse*, IREM de Toulouse.

Batanero, Carmen. (2000), "Dificultades de los Estudiantes en los Conceptos Estadísticos Elementales: el Caso de las Medidas de Posición Central", en *Ensino e Aprendizagem da Estatística.*Editado pola SPE, APM e a Universidade de Lisboa. Lisboa.

Calvo Rovira, J. Díaz Regueiro, M.(2002), "Suma de distancias ó cadrado", en *Gamma* nº 2, pp. 53-54.

Delhaye, Jean-Paul (2002), *L'intelligence et le calcul* . Baume-les-Dames.: Belin Pour la Science.

Díaz Regueiro, Manuel (2001), "Dous máis dous son cinco ". *Gamma* nº 1, pp. 53-55.

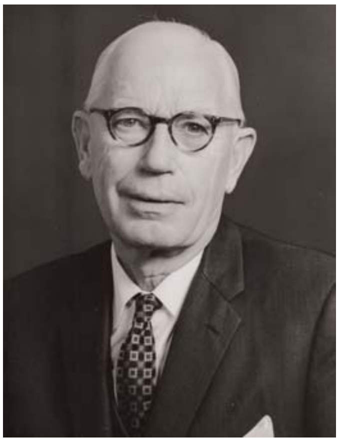
Hardie,C. D. (1942) *Truth and Fallacy in Educational Theory.* Cambridge: Cambridge University Press.

Hardy, Littelwood, Polya. (1951), *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press.

Machado, Nilson José (2002), *Matemática e Educação*. São Paulo: Cortez Editora.

Mosterín, Jesús (1978), "La estructura de los conceptos científicos", en *Investigación y Ciencia* nº 16 e en *Conceptos y teorías en la ciencia* (1984).

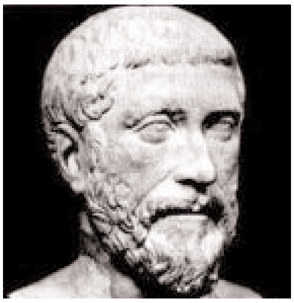
Rittaud, Benoit. (2002), "La moyenne harmonique",. pp 12-13 de *Tangente nº11 (Maths & Musique).* Argenteuil.



Profesor Charles Hardie (Glasgow 1911, Hobart 2002)

Profesor Paulo Abrantes (Lisboa 1953-2003)

Arquitas de Tarento (450 a.C.-350 a.C)
Deulle o nome á media harmónica.



Pitágoras (Samos, 582 - 500 a.C.) identificou tres tipos de medias: aritmética, xeométrica e harmónica.