Martingalas

Manuel Díaz Regueiro. CFR de Lugo

Resumen. Visualizar en la enseñanza de las matemáticas puede ser la diferencia entre un alumno que aprende y un alumno que suspende. Pero es que en realidad aprender esa competencia es crucial en un mundo en el que es imperativo visualizar, resumir en imágenes la información para obtener conocimiento. Con las martingalas se ejemplifica que aún en las propias matemáticas también es decisivo

Abstract To visualize when teaching mathematics can be the difference between a boy that learns and a boy that fails. But in fact learning that competence is crucial in a world where it is commanding to visualize, to summarize

the information in images in order for us to obtain knowledge. When it comes to martingales, it is illustrated that even in mathematics visualizing is decisive.

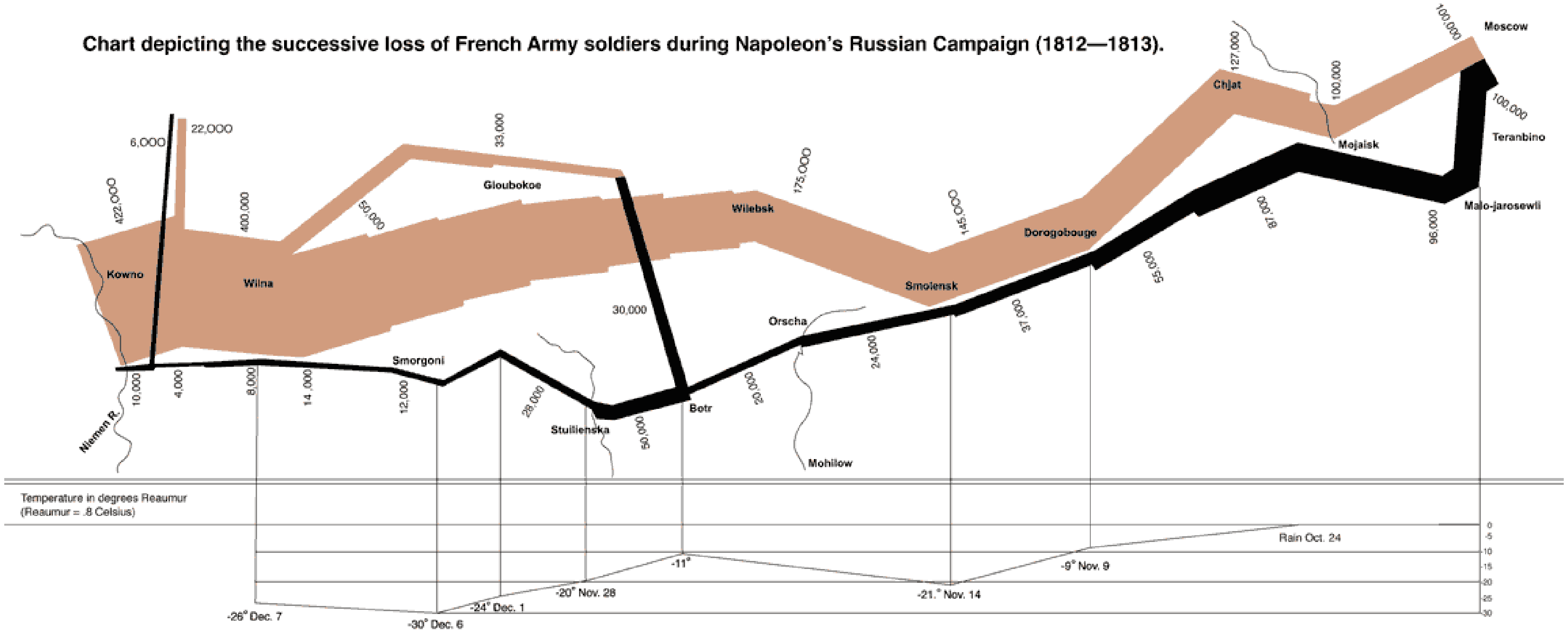
El porqué de la Visualización. El imperativo visual

¿Qué es visualización de la información y porqué es importante y decisiva en nuestra era? Podríamos definirla como la representación visual de datos abstractos, mediante el uso de ordenadores como medios interactivos, para amplificar su entendimiento (Card, Mackinlay, Shneiderman).

En el mundo en que vivimos, desde hace pocos años, tenemos ahí fuera megas de terabytes esperándonos. Muy poca de esa información la podemos trasladar a nuestro cerebro. Incluso la lectura es un proceso poco eficiente de traslación. Eso es lo que queremos decir cuando decimos que nuestros alumnos viven en una era de la imagen. Pero presentémonos este problema: tenemos megabytes de información y queremos trasladarla al cerebro de modo que esa información llegue lo antes posible. ¿Cuál es la solución de este problema?

¿Qué sentido poseemos que sea capaz de procesar un montón de información por segundo? Si sabemos que el oído la procesa a una velocidad de 100 kb/s y la vista a 100Mb/s, pienso que no tenemos ninguna duda de que en esta era de la información el sentido que funcionará más es el sentido de la vista. Estamos inmersos en la información visual y, ni nuestro alumnado ni nosotros mismos estamos dejando de leer por casualidad o por vagancia, sino por necesidad. Este es un aspecto sobre el que pocas veces reflexionamos. Podríamos denominarlo -siguiendo a Kant- como el imperativo visual: para procesar la ingente cantidad de información que nos invade es imperativo desarrollar exageradamente los recursos simbólicos y visuales o envolver la información en ropajes visuales. Así es que la visualización está a punto de convertirse en una ciencia y no pasarán muchos años hasta que ser “licenciado en visualización” deje de ser una fantasía.

De hecho, muchos problemas lo son porque no adoptamos una adecuada estrategia de visualización de los datos (en el genoma, por ejemplo).



Esta licenciatura en visualización (en la que Bourbaki y sus libros serían el contraejemplo perfecto) tiene una piedra fundadora en el clásico y notable precedente de Minard, quien, en 1869, describe los datos de la campaña de Napoleón en Rusia en una gráfica, que cuenta por sí sola una historia que exigiría mucho más de mil palabras. Pues bien, tenemos un dilema en la enseñanza, rechazamos la imagen (y a veces parece que con razón, sabemos y conocemos que hay imágenes equívocas) y las visualizaciones en la enseñanza de las matemáticas "porque se prestan a engaño", un curioso razonamiento de alguien que desconoce que los textos escritos pueden ser confusos,

mentirosos, engañosos y simplemente falsos, como sabemos el profesorado que leemos los razonamientos de alumnos que quieren responder algo escrito cuando no tienen ni idea del que quieren decir. O los abogados que hacen de la interpretación del texto escrito un arte. Pero también muchas veces se quiere decir algo y los resultados son manifiestamente ininteligibles, incomprensibles, y confusos. En matemáticas esto abunda, recuérdense las demostraciones fallidas o falsas de muchos teoremas, entre ellos el último teorema de Fermat.
Sin embargo, rechazar la imagen es rechazar el principal camino o vehículo de información para un alumnado que vive en la era de la información en la que todo el mundo, salvo cierto profesorado de matemáticas, se presta la mimarlo presentándole esa información a plena satisfacción, visual, e incluso manipulativa (en juegos de ordenador). El discípulo de Bourbaki, en cambio, cuenta y cuenta auditivamente su largo rollo y usa la vista para señalar que lo que dice también puede ser visto o leído en el libro, cuando no en penosas y engañosas imágenes dibujadas a tiza en la pizarra de hace mil años. Es que el alumnado se esfuerza poco… Dice el seguidor de Bourbaki.
Preocupados por el aprendizaje de la verdadera demostración, algunos dirán que la geometría dinámica engaña porque no permite sufrir para conocer una propiedad geométrica. O que algún alumno o alumna puede llegar a conclusiones erróneas, sin tener en cuenta el porcentaje de alumnado que llega a conclusiones erróneas mirando los espléndidos garabatos hechos con la tiza.

Todo esto que precede es para introducir una demostración de un teorema sobre martingalas del que sólo daré varias imágenes. Presento una demostración con imágenes de ordenador y además señalo que esa demostración visual será suficiente para que este artículo y los resultados que ofrece sean mejor recordados por los lectores que si fuese recreado con cientos de fórmulas…¿Estáis de acuerdo?

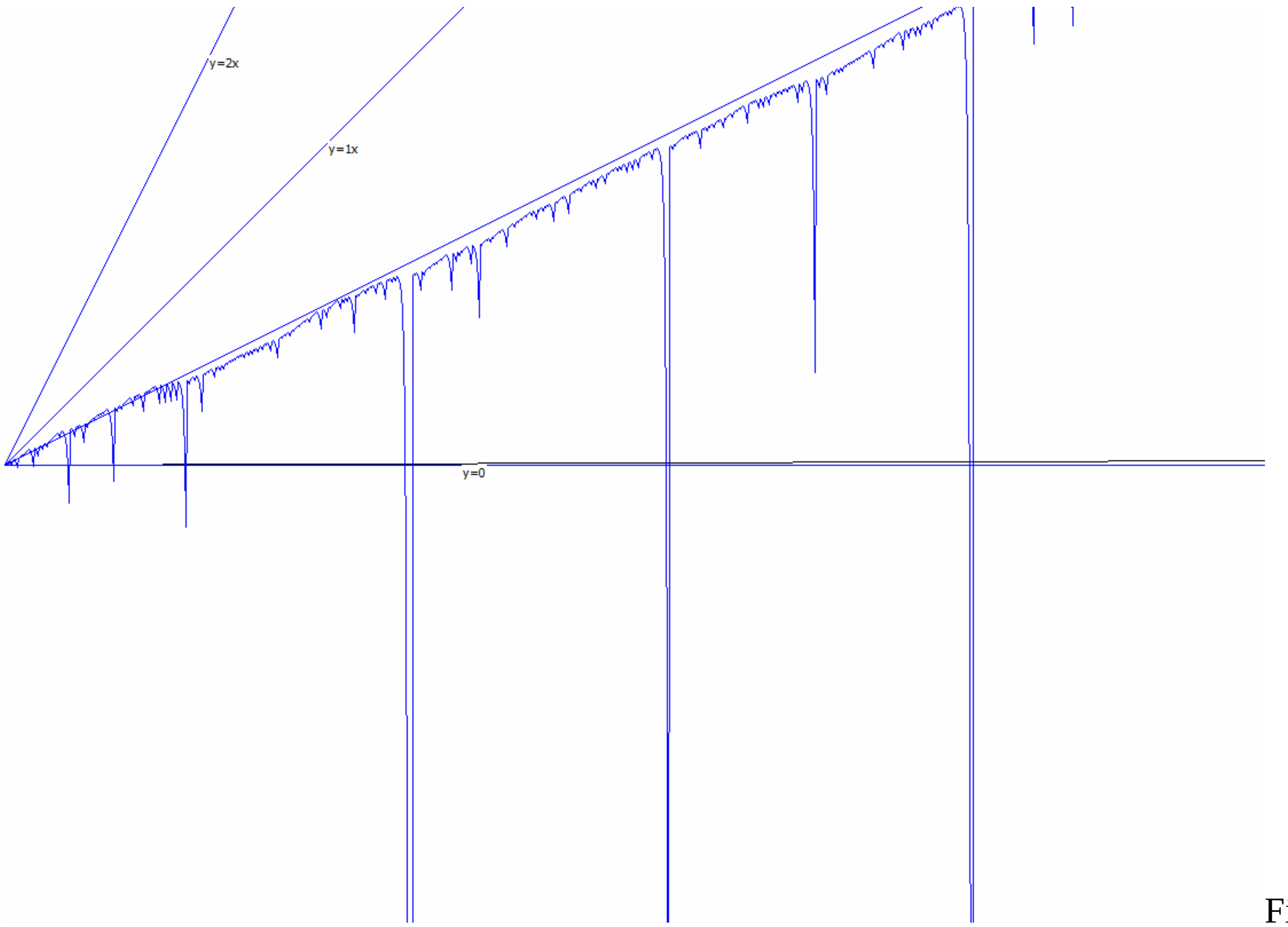


Figura 2

Martingala

Es un sistema de apuestas en la que debes doblar la apuesta actual después de perder. Así en la primera vez apuestas 1 unidad y si pierdes apuestas 2, si vuelves a perder, apuestas 4, etc. En el momento en que ganes vuelves a apostar 1 unidad, para, si vuelves a perder, apostar de nuevo 2 unidades…

Es un sistema de apuesta que produce una falsa confianza en el apostante y de la que seguro son fieles difusores los casinos. Efectivamente si uno mira la figura 2 que simula unas partidas siguiendo el sistema puede ver que hay muchas crisis o momentos en el que el apostante tiene que poner encima de la mesa grandes cantidades de dinero. Y es fácil pensar que en algún momento no tendrá el dinero suficiente- y esto viene dado porque a pesar de que pensamos que los eventos raros (10 veces seguidas en que pierdes, por ejemplo) no se producen, si esperamos el tiempo suficiente tienen una esperanza suficiente para que sea esperable su realización. Además, por si esto no fuese suficiente, los casinos limitan el máximo de la apuesta para que el sistema no pueda funcionar.

Esto presenta un aspecto poco tratado en la enseñanza de secundaria como puede ser este ejemplo: Lanzamos una moneda al aire 10, 100, 1000, 1000000… veces. ¿Cuántas veces necesitamos lanzarla para que la percepción de que ocurran 10 caras seguidas sea la de frecuente o al menos posible?.

Para eso estudiamos esta distribución que ejemplificaremos de la manera siguiente. Lanzamos 100 veces una moneda. Expresada en 1 y en ceros el resultado puede ser:

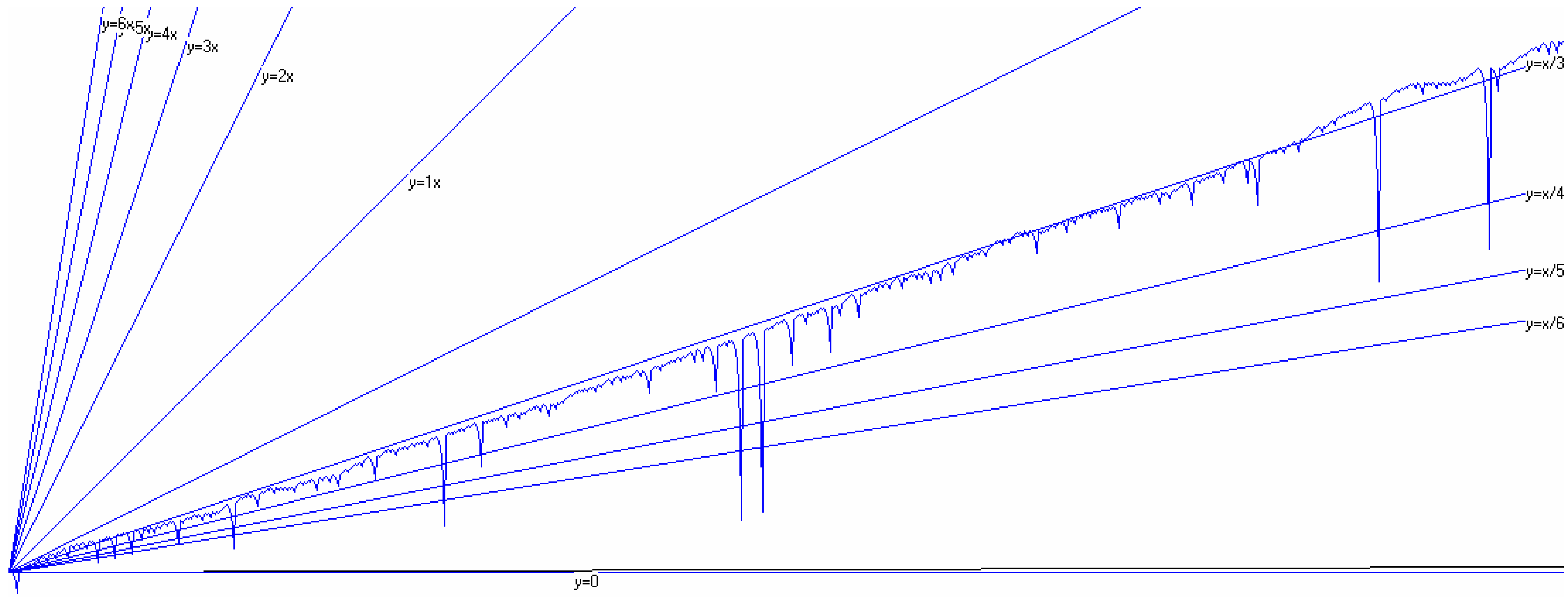
0010010000000100101011100000100010110110001010111110111110100101111100111100111110010100110000100011
. Ahora este resultado lo codificamos así: 2x1y2x1y7x1y2x1y1x1y1x3y5x1y3x1y1x2y1x2y3x1y1x1y1x5y1x5y1x1y2x1y

1x5y2x4y2x5y2 x1y1x1y2x2y4x1y3x2y en el que 2x significa 2 ceros seguidos y 3y 3 ‘1' seguidos. Recontando en este ejemplo sabemos que salieron 14 ceros aislados e 10 unos aislados, salieron 3 veces 2 ceros juntos y 9 veces 2 ‘1' juntos, etc. ¿Cuál es la distribución de probabilidad para la variable salir exactamente n caras seguidas?

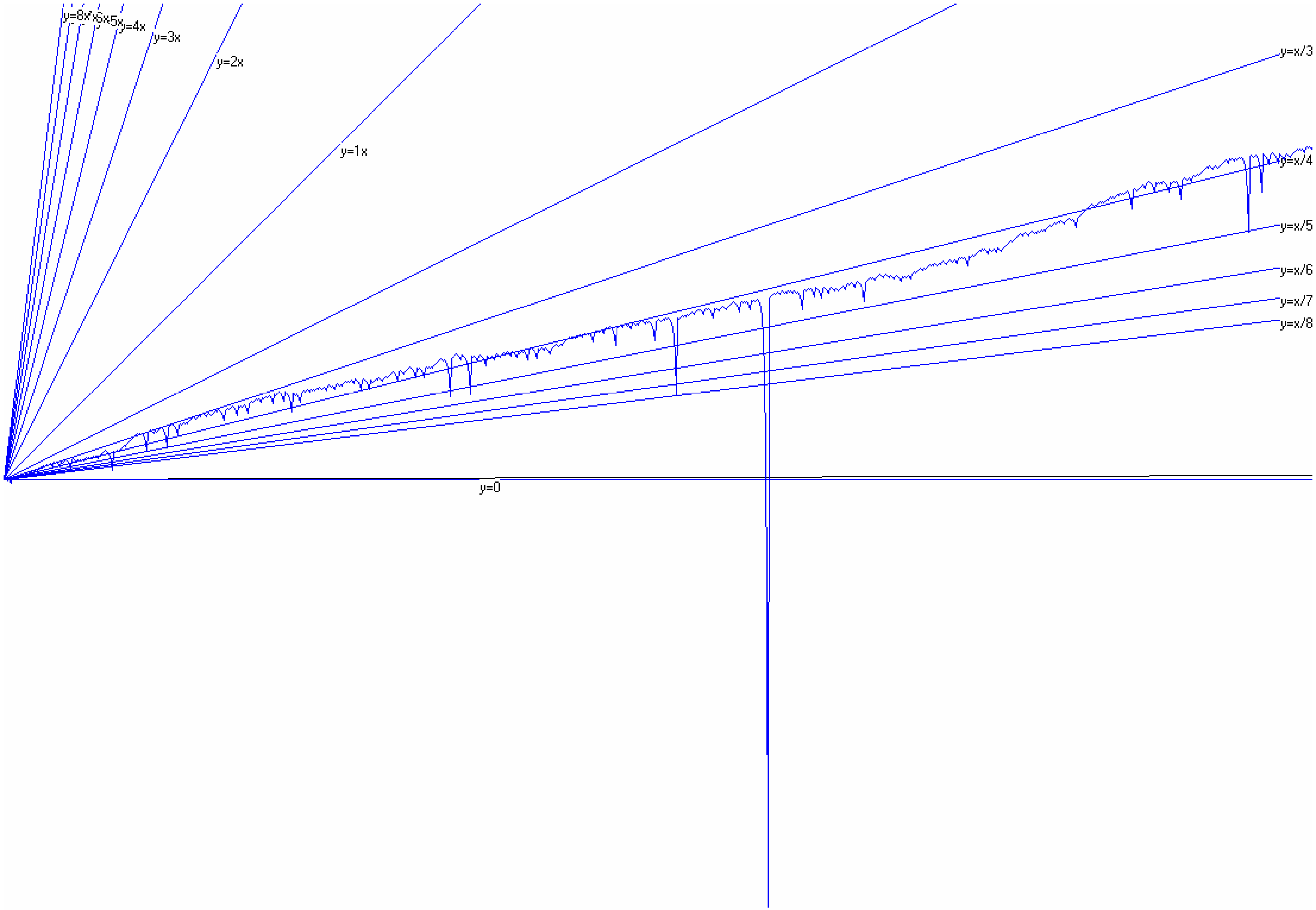
$P(X=n)=1/2^{n+2}$.

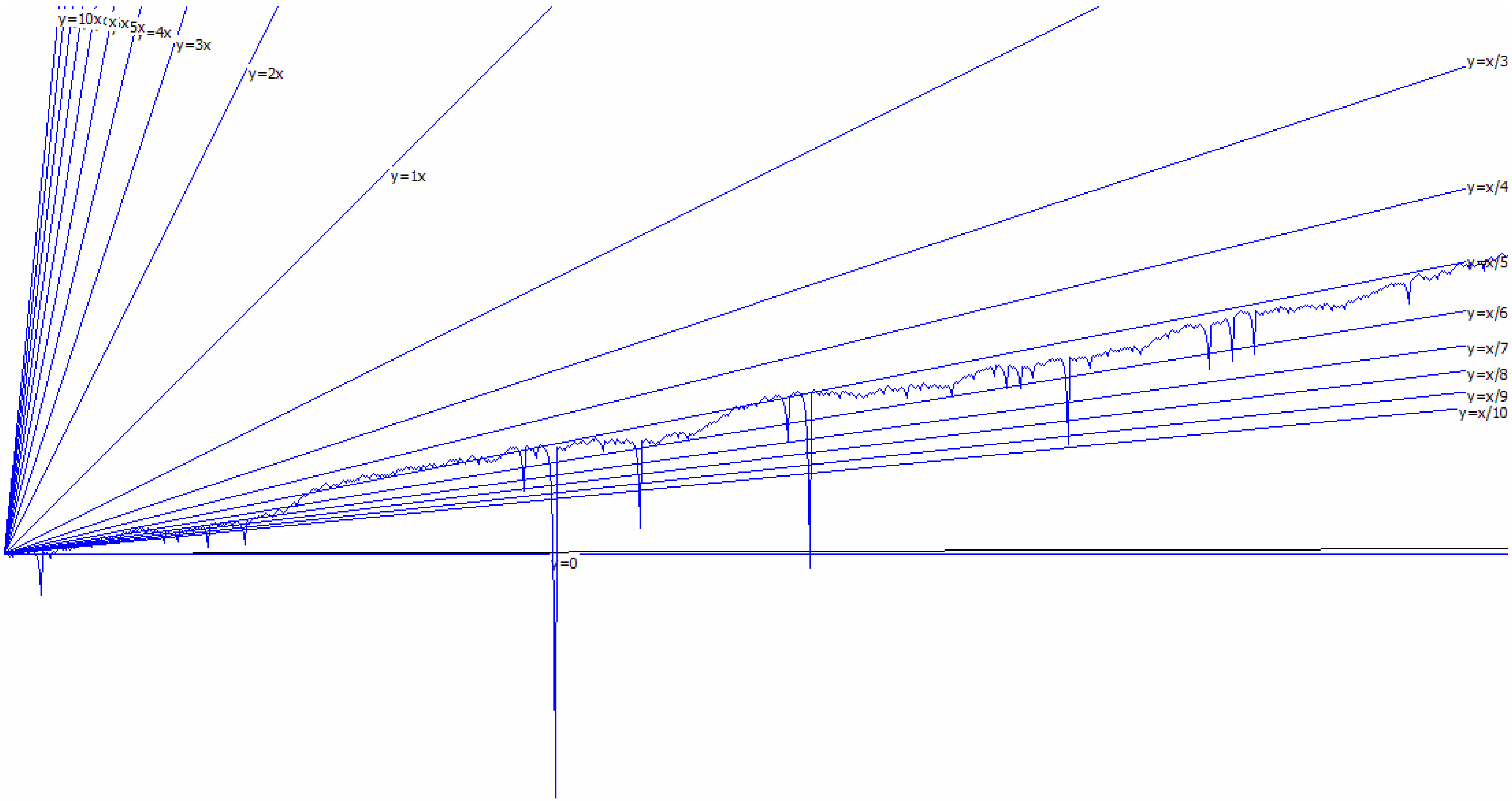
En el caso de 10 lanzamientos seguidos saliendo siempre cara, por ejemplo después de lanzar x veces una moneda ese caso de 10 caras seguidas va perdiendo “rareza”, hasta comenzar la percibirse como relativamente frecuente si pasamos de un cierto número. ¿Qué número? Pues tanto como que con x lanzamientos el número esperado de sucesos ‘exactamente 10 caras seguidas' será de $x/4*1/2^{10}$. Ahora podemos calcular perfectamente cuantos lanzamientos son precisos para tener o esperar un número dado de sucesos de los que hablamos. Y por tanto entender que no es más que la repetición de lanzamientos el factor que hace que un suceso “raro”, en principio, como puede ser salir ‘exactamente 10 caras seguidas' se convierta en un suceso del que es posible señalar múltiples ejemplos. Por ejemplo si x es un millón de veces podemos esperar 244 repeticiones del suceso. Ahora podríamos decir que la percepción personal es de que es un suceso muy raro, pero la estadística colectiva, la percepción digamos periodística del experimento, aún teniendo la misma probabilidad, es totalmente distinta si repetimos frecuentemente ese experimento o no.

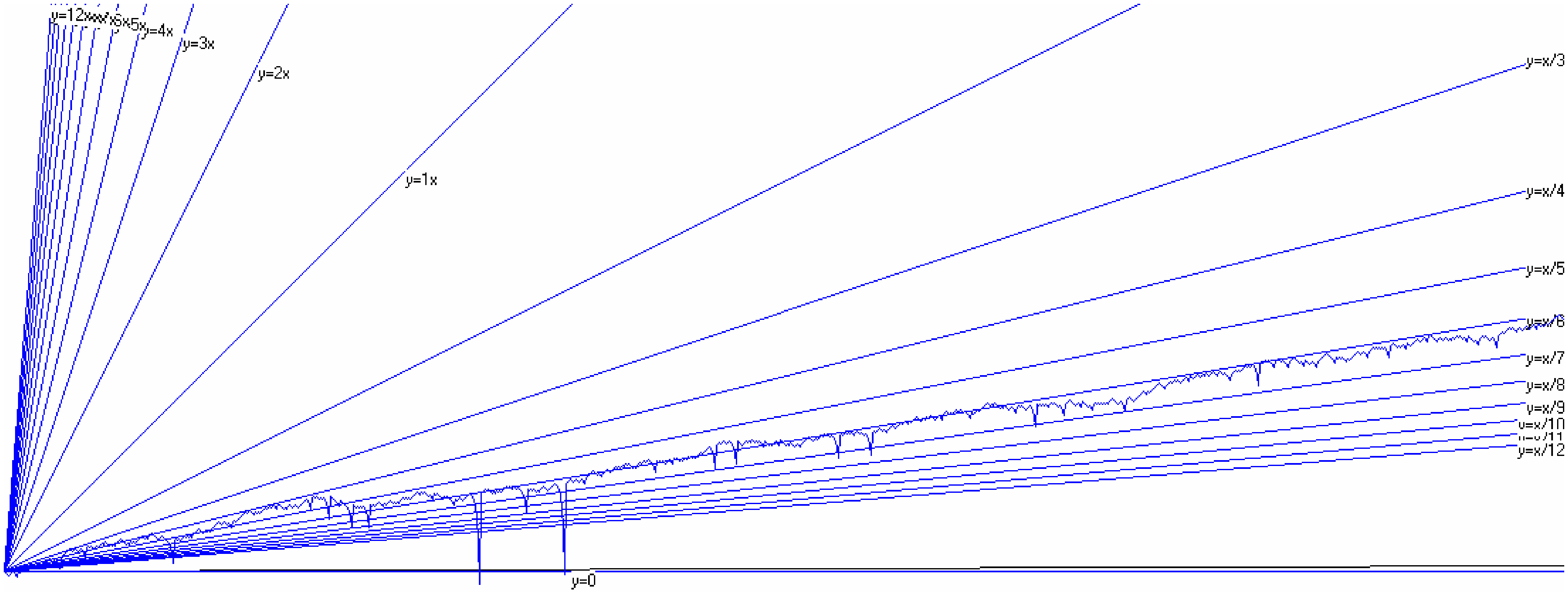
Pero, volviendo a la imagen parece que nos garantiza lo siguiente: pese a las crisis, al final, la cantidad del eje de las Y que representa el dinero en nuestro bolsillo (lo que ganamos o perdemos en el juego) alcanza un valor más que satisfactorio. Bien, si seguimos con las martingalas hay otros sistemas de apuestas distintos. La gran martingala es uno de ellos. En este, en caso de pérdida se dobla la apuesta y se le suma una unidad más. En este caso se garantiza una mayor ganancia a costa de un mayor riesgo (será más frecuente que no tengamos el dinero suficiente para seguir jugando). Si no era recomendable jugar con la martingala, menos lo será con la gran martingala. Ahora se me ocurre preguntar si podemos encontrar un sistema de martingala con menos riesgos aunque con más paciencia y la respuesta que encontré fue la siguiente: se duplica la apuesta sólo cada n jugadas perdidas. Lo sorprendente es que sigue funcionando como martingala. Y las imágenes (corresponden a martingalas doblando la apuesta cada 3, 4, 5 o 6 pérdidas) muestran el teorema:



y=6x
5x
y=4x
y=3x
y=2x
y=1x
y=x/3
y=x/4
y=x/5
y=x/6
y=0


y=8x
x
5x
y=4x
y=3x
y=2x
y=1x
y=x/3
y=x/4
y=x/5
y=x/6
y=x/7
y=x/8
y=0


y=10x
y=4x
y=3x
y=2x
y=1x
y=x/3
y=x/4
y=x/5
y=x/6
y=x/7
y=x/8
y=x/9
y=x/10
y=0



y=12x
y=4x
y=3x
y=2x
y=1x
y=x/3
y=x/4
y=x/5
y=x/6
y=x/7
y=x/8
y=x/9
y=x/10
y=x/12
y=0

Podemos percibir visualmente que al aumentar el valor n (número de veces en las que perdemos y que esperamos para doblar la apuesta), se hacen menos esperables grandes crisis y por el contrario se hacen menos ajustados los resultados a la recta que se marca, la tendencia seguida por la recta está menos definida, pero es suficientemente aceptable.

Bibliografía

Claudi Alsina e Roger B. Nelsen, Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics (Classroom Resource Material), The Mathematical Association of America, 2006.