γ 4
GAMMA
setembro 2004

Leyendo *Fibonacci*

Manuel Díaz Regueiro

1-El problema

Ricardo Moreno cuenta en su libro de *Fibonacci* como Juan de Palermo y Teodoro, filósofos del séquito del emperador Federico II, le proponen varios problemas a Fibonacci, comentando que no se conoce como llegó a la solución de la ecuación de tercer grado $x^3+2x^2+10x=20$, en uno de los problemas.

La verdad es que lo que contaré aquí consiste en pequeñas contribuciones que surgen de la lectura de ese libro y otras que ejemplifican como la historia puede promover la reflexión en matemáticas.

Desde luego es difícil pensar que conociera las fórmulas de la solución de la ecuación de tercer grado que descubrieron compatriotas posteriores. Y dentro de los métodos numéricos no conocería la regula falsi o el método de Newton. Si podría utilizar, quizás, el método de la bisección.

Sin embargo, por lo menos desde Herón, era conocido el método de iteración: para resolver $x^2=A$, resolvemos $x=(A/x+x)/2$ (la misma ecuación, pese a su distinta expresión) iterando desde el valor 1. Un método que, por otra lado, yo señalaría como preferible a enseñar el cálculo de la raíz cadrada con un algoritmo “mágico” o de muy difícil explicación como el que aún se enseña en las escuelas, perfectamente generalizable al cálculo de la raíz enésima $x^n=A$, ya que nos daría $x=(A/x^{n-1}+x)/2$ y perfectamente ejemplificable con una calculadora o con un ordenador, que, por otro lado, hacen innecesario su cálculo.

Si educación es lo que queda cuando olvidamos todo lo que nos enseñaron, como dijo un ministro inglés hace siglos, el método de Herón tiene mucho más de educativo que el método de la raíz cuadrada “escolar” en tanto que fácilmente reproducible, inolvidable y de mucha menor complejidad.

Pues bien, volviendo a Fibonacci es posible que resolviera la ecuación por iteración $x=20/(x^2+2x+10)$

Si lo implementamos en un programa de ordenador de pocas líneas- en Pascal, tenemos

```
x:=1;x1:=2;
while abs(x-x1)>1e-15 do
begin
x:=x1;
x1:=x/(x^2+2x+10);
end;
```

en pocos pasos la respuesta 1,36880810782137. Que curiosamente difiere a partir de la sexta cifra de la de Fibonacci. Comentando esto con Ricardo sugiere que fue algún error del copista del libro de Fibonacci, más que del propio Fibonacci, y que Woecke coincide con ese valor de la solución y que podría ser ese el método de cálculo hecho por Fibonacci.

Queda pues, finalmente, un buen ejemplo de que preguntarse ¿Como pudo resolver este problema, como lo haría Fibonacci? Puede dar mucho más juego en la clase que yendo al último programa de ordenador a buscar la solución.

2-SUMAS TELESCÓPICAS GENERALIZADAS

Aplicando sumas telescópicas es posible calcular $F_1 + F_2+F_3+...+F_n$ e $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ ... \ + \ F_n^2$ siendo F_k los números de Fibonacci. En las sumas telescópicas habituales es posible colocarlas en dos columnas en las que las diagonales dan suma cero. ¿Qué pasa si en vez de dos cogemos n columnas?. Veamos un ejemplo.

La suma de $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ es calculable telescópicamente cuando $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios tales que grado($P(x)$)<grado($Q(x)$)-1 = n-1 y Q(x) tiene n raíces (i = 1,..., n). Además el sumatorio comienza en un número que excluya toda anulación del denominador. Dado que las n raíces del denominador son distintas: .

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + ... + \frac{A_n}{x-a_n}$$

Por lo que $P(x)=A_1(x-a_2)...(x-a_n)+...+A_n(x-a_1)...(x-a_{n-1})$ y como $P(x)$ tiene un grado menor de n-1, necesariamente $A_1 + A_2 + ...+ A_n = 0$.

Como

$$\frac{P(1)}{Q(1)} = \frac{A_1}{1-a_1} + \frac{A_2}{-a_1} + ... + \frac{A_n}{-a_1-n}$$

$$\frac{P(2)}{Q(2)} = \frac{A_1}{2-a_1} + \frac{A_2}{1-a_1} + ... + \frac{A_n}{-a_1-n+1}$$

....

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{A_1}{n-a_1} + \frac{A_2}{n-a_1-1} + ... + \frac{A_n}{-a_1-1}$$

Vemos que la suma de los coeficientes de la diagonal es nula, y lo mesmo pasa con las siguientes.

Por lo que esa suma infinita da igual a la suma de las diagonales, que siempre suman cero más las n primeras diagonales incompletas. Luego el resultado final es la suma de esas primeras diagonales incompletas. Como ejemplos:

$$\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x(x-1)} = 1$$, ya que (suma telescópica simple)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + ... = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$

$$\sum_{x=3}^{\infty} \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{4}$$, ya que, en este caso, A_1 = 1/2, A_2 = -1, A_3 = 1/2

$$\frac{1}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2} + ... = \frac{-1}{2} + \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$$

Este resultado puede generalizarse siempre que las raíces del denominador estén en progresión aritmética, (i = 1,..., n) .

La verdad que este pequeño ejemplo está hecho a partir de la lectura de "Fibonacci" de Ricardo Moreno. Y responde, tangencialmente a la pregunta: Dado que todo nº racional puede expresarse como suma de fracciones de numerador 1. ¿Es cierto que también todo nº irracional lo es? Parece claro que lo es de infinitos sumandos. Pero toda suma de infinitos sumandos de fracciones de ese tipo- fracciones egipcias se le llaman en otra bibliografía- no tiene porque ser necesariamente un número irracional. Para ejemplo, el citado antes. Surge la pregunta, que dejamos al lector, de cuales son esas excepciones y que tienen que ver con las sumas telescópicas.

En las páginas 158-161 de G. Polya (1966) se hacen varias demostraciones de que .

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + ... + \frac{1}{4n^2-1} = \frac{n}{2n+1}$$

Entre ellas, la más breve, es la que utiliza una descomposición telescópica (aunque en este caso se debe tener en cuenta que no es una suma infinita sino finita).

Siguiendo a Apostol (1965) podríamos definir estas series a_n tales que existen otras series b_{in} (i=1...k) tales que $a_n=b_{1n}+b_{2n}+....+b_{kn}$ y que cumplen que $b_{1n}+b_{2n+1}+....+b_{kn+k-1}=0$ (las sumas diagonales son cero). Entonces $\Sigma\ a_n$=Suma de las k-1 primeras diagonales incompletas (con menos de k sumandos). Si la suma lo es de n sumandos será igual a la suma de las k-1 primeras diagonales incompletas y de las k-1 últimas diagonales incompletas.

Bibliografía.

Ricardo Moreno Castillo (2004). *Fibonacci*. Editorial Nivola, Madrid.

George Polya (1966). *Matemática y razonamiento plausible*. Editorial Tecnos SA. Madrid.

Tom M. Apostol. (1965). *Calculus. Volumen I.* Editorial Reverté, Barcelona.