As inesperadas relacións culturais das matemáticas da optimización

Manuel Díaz Regueiro
Centro de Formación e Recursos de Lugo

Resumo

A optimización aparece en lugares inesperados da cultura: os labirintos clásicos –como os dos petroglifos galegos- poden ser vistos como medios de maximizar os percorridos extraídos dunha- ou contidos nunha- determinada área.
Outras optimizacións refírense a ver unha estatua co maior ángulo, que aplicamos tamén ao rugby, ou as leis da óptica aplicadas a un socorrista nunha praia. En xeral, queremos ver os problemas de optimización en contextos da vida real, motivadores e interesantes.

1-Qué optimizan os labirintos?

A raíña Dido e a optimización

Conta a Eneida de Virgilio que a raíña Dido, para fundar Cartago, dispoñía da terra que puidese abarcar cunha pel de touro. Da pel fixo unha tira que colocou en forma de semicírculo cos extremos contra o mar e conseguiu así a maior superficie posible para un perímetro dado.

O episodio constitúe un exemplo senlleiro de optimización. Un problema de optimización trata de tomar unha decisión óptima para maximizar (ganancias, velocidade, eficiencia, etc.) ou minimizar (custos, tempo, risco, erro, etc.) usando un criterio determinado.

Así pois, a optimización é unha parte das matemáticas útil para resolver e calcular o máximo ou mínimo dun problema. A busca de máximos e mínimos de funcións reais dunha variable estúdanse en primeiro e segundo de Bacharelato, pero o problema de Dido, chamado o problema isoperimétrico, é demasiado difícil para abordalo nesa etapa. Con todo, veremos tres exemplos culturalmente relevantes e interesantes.

O país dos labirintos

Nun artigo de Lemniscata nº 5, publicación de AGAPEMA, titulado "O país dos labirintos" sinalo que, segundo as opinións de expertos galegos e británicos, considéranse aos petroglifos galegos en forma de labirintos como os máis antigos que se coñecen. Somos, pois, os primeiros en deseñar labirintos.

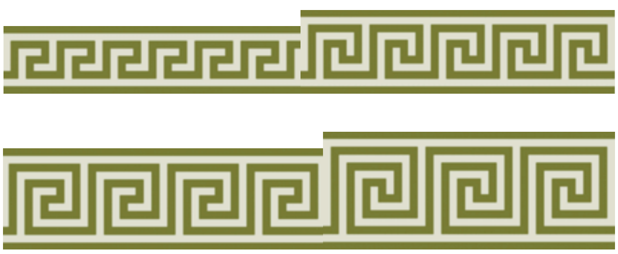
Tamén conto que os nosos antergos os utilizaban como sistema defensivo nos castros galegos, ademais de expoñer razóns de que, pese a moitos historiadores galegos, eran celtas.

Imos dar algún paso máis e relacionar os labirintos coas chaves gregas, os problemas de optimización e o seu uso cotiá.

A chave grega

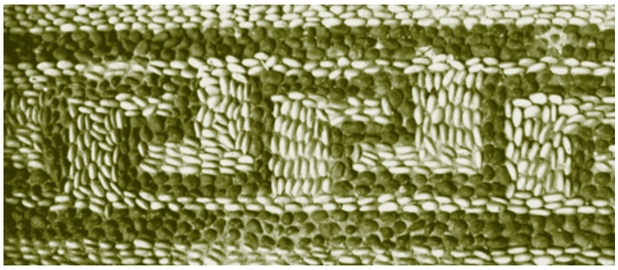
A chave grega é un patrón antigo, usado en floreiros mediterráneos e en mosaicos. Algúns autores opinan que é unha representación das ondas (en forma de cadrados!). Aparentemente non teñen nada que ver cos labirintos pero, se tomas catro "chaves" e as torces arredor dun círculo, conseguirás un labirinto!

Podes buscar as torceduras dominantes gregas en moitos labirintos como, por exemplo, nos romanos. O labirinto cretense ou galego desenrólase nunha chave grega.



DIVERSOS TIPOS DE CHAVES GREGAS

É POSIBLE CHEGAR A ESTE LABIRINTO DESDE CATRO CHAVES GREGAS?



CHAVE GREGA NUNHA RÚA DE RODAS

Na actualidade tamén nos atopamos con labirintos. Por que se usan os labirintos na zona de identificación dos aeroportos? Porque se consegue aumentar a lonxitude posible da cola para un determinado espazo rectangular; caben máis persoas.

Se consultamos o libro de Rouse Ball [2] veremos explicacións adicionais do porqué se usan os labirintos:

FIGURA 1

FIGURA 2

"Outra clase de labirintos antigos consistiu nun camiño tortuoso confinado nunha pequena área de terra e que conduce a unha árbore ou a unha urna central. Este é un labirinto no que non hai ningunha oportunidade de tomar o camiño equivocado; pero, cando a área enteira pode ser ocupada polas voltas dun camiño, a distancia a percorrer desde a entrada ao centro pode ser considerable, incluso aínda que o terreo cuberto polo labirinto sexa pequeno -así describe Rouse Ball o aspecto optimizador do labirinto-.
A forma tradicional do labirinto construído para o Minotauro é un exemplar desta clase. Podémolo contemplar nos reversos das moedas de Knossos; na figura I móstrase un exemplo deste tipo de labirintos. O deseño é igual ao que se presenta na figura II, como pode comprobarse facilmente dobrando arredor dun círculo a figura rectangular alí dada."

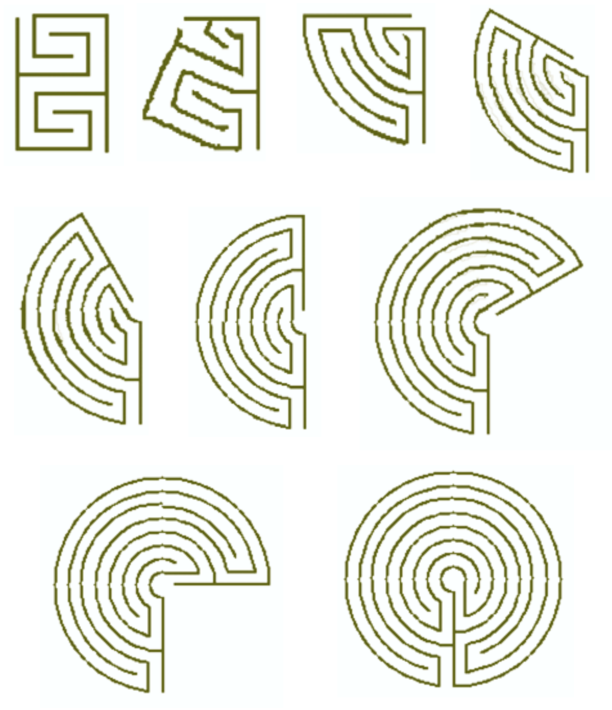
Os labirintos e as espirais.

En [3], no artigo de Reza Sarhangi, un dos organizadores de Bridges, congreso anual que fai pontes entre a arte e a matemática, cóntase o seguinte:

> *Slavik Jablan ilustrou espirais que poden ser cambiadas en labirintos usando diseccións e rotacións*

FIGURA 3: JABLAN AMOSA QUE UNHA SIMPLE DISECCIÓN E UNHA ROTACIÓN DE 90° CAMBIA UNHA SIMPLE ESPIRAL NUN SOFISTICADO LABIRINTO. PODERÍA SER POSIBLE QUE ESTE DESCUBRIMENTO FOSE TAN EXCITANTE PARA OS GREGOS QUE O PUXESEN NAS SÚAS MOEDAS? (REZA)

Nós teriamos que preguntar, á súa vez, se é posible que ese descubrimento tan excitante o tivesen os galegos que descubriron o labirinto xa que tamén tiñan como elemento cultural as espirais de todo tipo. É dicir, sabían pasar da espiral ao labirinto e sabían facelo por algunha razón especial?
Poderiamos agora razoar sobre as propiedades optimizadoras do labirinto? Que nos amosa a relación coa espiral de Jablan? Son preguntas para abordar noutro momento.



O PASO DE DOBRAR SOBRE UN CÍRCULO CATRO CHAVES GREGAS SINXELAS PARA FORMAR UN LABIRINTO.

PÁX 32 E 34 DE [4]

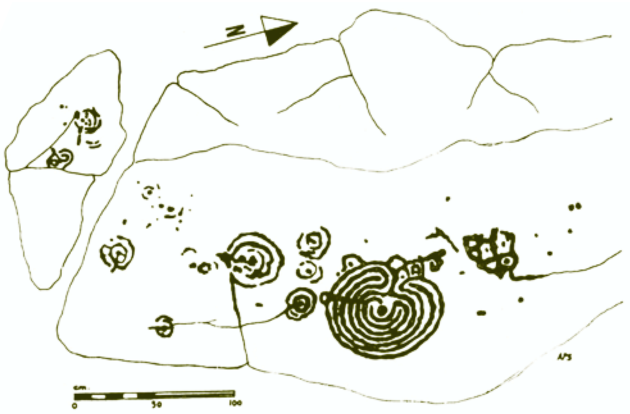


FIG. 23 PEDRA DO LABIRINTO. MOGOR, MARÍN, PONTEVEDRA.

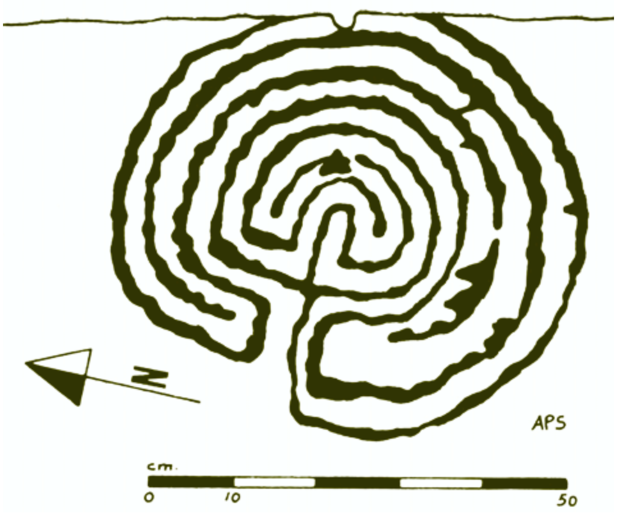


FIG. 24 PEDRA DOS CAMPIÑOS. MOGOR, MARÍN, PONTEVEDRA.
PÁX 34 DE [4]

[1] Manuel Díaz Regueiro, O País dos labirintos en Paseos Matemáticos. Lemniscata nº 5. Edita Anaya e AGAPEMA. 2006.

[2] W.W. Rouse Ball and H.S.M. Coxeter Mathematical Recreations and Essays. Dover. New York. 1987.

[3] Reza Sarhangi, Making Patterns on the Surfaces of Swing-Hinged Dissections, Actas de Bridges 2008 Leeuwarden.

[4] Antonio de la Peña Santos e JM Vázquez Varela. Los petroglifos gallegos. Grabados rupestres prehistóricos al aire libre en Galicia. Cuadernos del Seminario de Estudios cerámicos de Sargadelos. Edicións do Castro. A Coruña, . 1979.

[5] http://gwydir.demon.co.uk/jo/maze/cretan/index.htm

2- Como optimizar a visión dunha estatua e dunha xogada no rugby?

Eliximos estes dous feitos para mostrar como os problemas de optimización están presentes en multitude de situacións.
Comezo polo tema da estatua e pregúntome, enlazando co que acabamos de contar, non deberíamos ter en Galicia unha estatua ao matemático galego descoñecido que inventou os labirintos? É máis, bótase a faltar unha estatua para cada un dos galegos recoñecidos que non a teñen, u-la a estatua de Pondal? U-la a de Roi Xordo? U-la a do Medulio? No canto diso temos multitude de obras paradas, verdadeiros monumentos á especulación inmobiliaria en toda Galicia. Así que, máis monumentos aos heroes positivos galegos e menos aos negativos.
En realidade non teremos suficiente autoestima colectiva ata que non teñamos as mil estatuas que reclamaba para Galicia Otero Pedrayo (reclamaba realmente mil primaveras, que eu fai anos convertín en mil Rosalías e hoxe mesmo, ao carón do contexto, converto en mil estatuas, que se traduciría en que en vez de dividir e maldicir estariamos pola unión e a converxencia aceptando que temos mil persoas admirables na nosa historia. Só mil?).

Iniciemos o paseo, se un se achega á praza de Santo Domingo en Lugo atópase co monumento do bimilenario da cidade que sostén sobre unha columna a aguia imperial.

Queremos saber a que distancia da base do pedestal o ángulo co que se ve a aguia é máximo. En efecto, se estamos moi próximos, o ángulo baixo o que se ve a aguia é pequeno e a medida que nos separamos vai medrando. Pero o mesmo ocorre se partimos dunha posición moi afastada e nos imos acercando, polo que necesariamente terá que haber unha posición dende a que este ángulo sexa máximo.

Este problema descríbese en varios libros de matemática recreativa (ver bibliografía), pero estes seguen o dito de Hawkings, "cantas máis ecuacións se poñan nun libro menos lectores ten", polo que non é usual atopar os cálculos relativos ao tema.

Imos velos:

Tomando como referencia a posición do espectador, a unha distancia x do pedestal, temos dous ángulos α_1 e α_2 cos que se ven as alturas h_1 , desde o punto do pedestal no que incide a horizontal que parte dos seus ollos ata a base da aguia, e h_2, desde o mesmo punto ata a parte superior da aguia.

Xa que logo α_1=arctan(h1/x) e α_2=arctan(h2/x) e o ángulo do que estamos a falar e do que queremos buscar o máximo é $\alpha=\alpha_2-\alpha_1$.

Se tomamos a súa tanxente,

$$\tan(\alpha)=\tan(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\tan(\alpha_2)-\tan(\alpha_1)}{1+\tan(\alpha_2)\tan(\alpha_1)}=\frac{\frac{h_2}{x}-\frac{h_1}{x}}{1+\frac{h_2h_1}{x^2}}=\frac{(h_2-h_1)x}{x^2+h_2h_1}$$

Polo que $\alpha = \arctan\left(\frac{(h_2-h_1)x}{x^2+h_2h_1}\right)$

Buscamos que α sexa máximo, polo que derivamos a expresión respecto a x.

$$\alpha' = \frac{\frac{(h_2-h_1)(x^2+h_2h_1)-2x(h_2-h_1)x}{}}{1+\left(\frac{(h_2-h_1)x}{x^2+h_2h_1}\right)^2}=\frac{-x^2(h_2-h_1)+(h_2-h_1)h_2h_1}{1+\left(\frac{(h_2-h_1)x}{x^2+h_2h_1}\right)^2}$$

Se igualamos a cero esa derivada primeira obtemos $x=\sqrt{h_2h_1}$

O punto buscado é a media xeométrica das alturas!, e iso non se reflicte na abundante bibliografía consultada! Compróbase na derivada segunda que é un máximo.

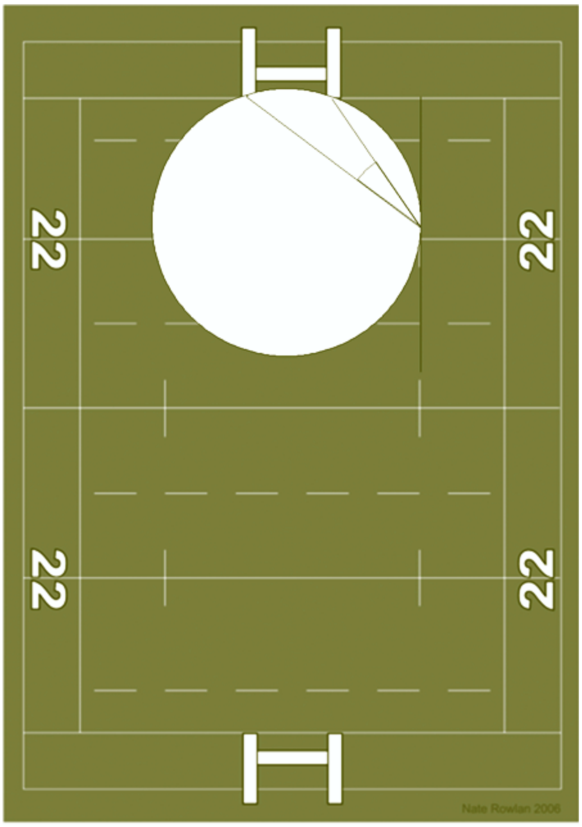
Ben, despois de ter perdidos xa a miles de lectores, pese a non poñer demasiadas ecuacións, só engadir que estes cálculos, como toda a matemática, son tan válidos para a estatua de Nelson en Trafalgar Square de Londres ou para o Sagrado Corazón de Río de Janeiro, como para a aguia imperial do bimilenario de Lugo. Serve, xa que logo, como un problema exemplo máis para os percorridos matemáticos por Galicia, dos que a asociación AGAPEMA, que presido, xa ten feitas varias publicacións: Miradas e andainas matemáticas por Ferrol e Paseos Matemáticos por Galicia.

Este é un exemplo interesante da vida real para o alumnado de Bacharelato, polas ferramentas que require usar esta proposta. Con todo, en [2] preséntase unha formulación accesible para alumnado de Secundaria obrigatoria pois, usando Cabri, Geogebra, ou outro sistema de Xeometría Dinámica, pódese ir variando o punto x e observando a función que describe o ángulo de visión.

En [3] podemos seguir a historia do problema. David Wells conta que este problema é notable por tratarse do primeiro problema de optimización, sen ter en conta os da antigüidade da que trataremos no apartado 3 o problema de Herón, sobre o raio de luz que se reflicte na superficie dun espello.

Este problema foi orixinalmente presentado por Regiomontano[1] a Christian Roder, en 1471, aínda que aplicado a unha hasta de bandeira suspendida verticalmente. Pero aquí preséntanse versións máis actuais:

a) Desde que distancia se poderá abarcar enteiramente, no ángulo de visión máximo, unha estatua colocada sobre un pedestal? Pregunta xa comezada a tratar neste apartado.
b) Cal é o mellor punto para que sitúe a pelota un pateador de Rugby? Problema que se abordará a continuación.



De acordo coas regras do Rugby, a conversión dun ensaio debe ser executada sobre unha liña imaxinaria, perpendicular á liña dos postes e que se inicia na parte posterior a estes no punto do chan no que ocorreu o toque. É dicir, o xogador que realiza o ensaio pode poñer a pelota en calquera parte ao largo desa liña pero, cal é o mellor lugar? Se a pon na intersección coa liña de ensaio, entón está moi preto dos postes (e iso é vantaxoso) pero non pode ver o oco entre eles. Se pon o balón moi lonxe da liña

[1] **Johannes Mueller** (ou Müller) , Koenisberg (1436), Roma (1476). Corrixe as Táboas Alfonsinas e traduce o Almaxesto de Tolomeo. Funda en Nüremberg o primeiro observatorio europeo e participa na reforma do calendario polo que Sixto IV o chama a Roma. Aplica por primeira vez métodos alxébricos á resolución de triángulos.

de ensaio, poderá ver o lugar entre os postes, pero o tiro convértese en máis difícil porque agora estará máis lonxe dos postes. Parece lóxico pensar que entre estas dúas posicións imposibles ou difíciles poida haber unha posición óptima, que será cando o ángulo no que ve os postes está nun máximo, é maior que calquera outra visión dos postes desde outro punto calquera. Esta consideración non se aplica aos casos en que o ensaio foi obtido entre os postes.

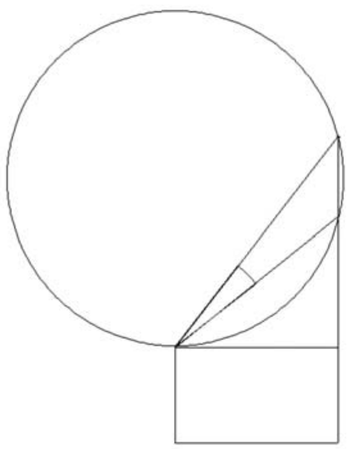
En que punto desta liña se debe executar o puntapé de conversión se pretendemos que o ángulo que subtende o segmento definido polos dous postes sexa máximo?

Debuxemos o círculo que pasa polos dous postes e que sexa tanxente á liña de conversión. O punto onde o círculo toca a esa liña tanxente é o mellor lugar para facer a conversión.

Como xa dixemos hai unha excepción a esta solución, cando o ensaio foi obtido entre os postes, entón o xogador debe poñer a pelota tan preto dos postes como poida para acertar mellor. O ángulo subtendido polos postes neste caso faise maior cando máis preto coloquemos o balón, aínda que non debe chegar a ser 180º pois entón estará na liña de meta e serálle moi difícil meter o balón.

En resumo, solución para atopar a optimización da visión da estatua e para a xogada do rugby

a) Deséñase unha circunferencia que pase polos puntos máis alto e máis baixo da estatua e que admita unha tanxente horizontal trazada polo punto de vista do observador.

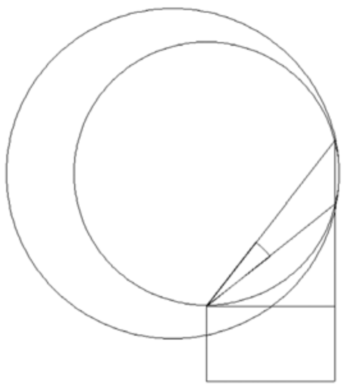


Este deberá mirar desde ese punto de tanxencia. Hai algunha imprecisión nesta solución, xa que a estatua non é unha hasta vertical!

b) Se rebatermos a figura para un plano horizontal, a solución para o puntapé de conversión no rugby é a mesma. O puntapé debería ser executado a partir do punto de tanxencia da circunferencia que pasa polos postes e é tanxente a liña de ensaio

A que se debe que estes puntos, e non outros, sexan a solución nos dous casos? Como entender esa solución?
Nas aulas acostúmase a poñer a énfase na propiedade que di que "todos os ángulos inscritos nunha circunferencia que abarcan o mesmo arco son iguais", pero non na que sinala que todos os ángulos externos (con vértice nun punto exterior) a unha circunferencia que abarcan a mesma distancia desa mesma circunferencia son menores que o ángulo correspondente que abarca ese arco da circunferencia. É dicir, se o vértice do ángulo se situa no exterior da curva, o ángulo será menor, se no interior, será maior. Deseñar a circunferencia de modo que sexa tanxente á liña perpendicular á que contén os postes, garante que todos os outros puntos desa liña se encontran no exterior da curva e polo tanto que desde eses puntos se vexan os postes con menor ángulo.

De igual maneira, como podemos ver na figura, o ángulo desde o que se pode ver a estatua desde calquera punto dunha circunferencia maior que a circunferencia solución, e que pase polos extremos da estatua, é menor que o ángulo polo que se ve desde a circunferencia tanxente que resaltamos no debuxo anterior. Polo que calquera outro punto da liña de observación, á altura dos nosos ollos, terá un ángulo menor de visibilidade que no punto de tanxencia.



Bibliografía.

[1] Rob Eastaway and Jeremy Wyndham. *Why do Buses come in threes?* Robson Books. London. 1988

[2] James R. King, Doris Schattschneider Editors. *Geometría Dinámica.* APM. Lisboa. 2003

[3] David Wells *Antología de Puzzles. Desde o antigo Egipto até 1992.* Editora Replicaçao. 1999. Lisboa

[4] http://www.arrakis.es/~mcj/prb041.htm *El problema de Regiomontano*

[5] Michael de Villiers, *Place Kicking Locus in Rugby, Pythagoras,* 1999, No. 49, Aug, 64-67. Official Journal of **AMESA.**

[6] Luis Puig Mosquera, e outros. *Miradas e andainas matemáticas por Ferrol.* Concello de Ferrol. 2005

[7] *Paseos Matemáticos por Galicia.* Lemniscata nº 5. Edita Anaya e AGAPEMA. 2006.

3-O camiño máis curto do socorrista na praia.

Consideremos agora un novo problema de paseo matemático, digno de acometer e de subliñar en Galicia pola gran liña de costa que posúe. A cantidade e beleza das súas praias atrae no verán a numerosos bañistas e iso aumenta o número de rescates que deben efectuar os socorristas nas nosas praias.
Cal é o camiño máis curto a percorrer por un socorrista que acuda a auxiliar a unha persoa que teña problemas na zona de baño?

Como antecedentes veremos que hai problemas similares en física:

Principio de Fermat do tempo mínimo

O camiño que, entre todos os posibles, segue un raio de luz para ir dun punto a outro, é aquel en que a luz emprega un tempo mínimo.

Feyman explica así o Principio de Fermat.

"Imaxina que nos atopamos na costa, lonxe do bordo, nun punto A e no mar, alonxado do bordo, unha persona cae dunha barca nun punto B. Nós vemos o accidente e podemos acudir correndo e despois nadando. Que facemos? Imos en liña recta? ¡sí, sen dúbida!... Sen embargo, deberiamos decatarnos de que é vantaxoso correr unha distancia un pouco maior por terra para diminuír a distancia que debemos nadar, porque nos movemos máis lentamente polo mar que pola terra. É preferible percorrer un maior camiño para tardar o menor tempo posible xa que esta é a magnitude que interesa para salvar á persoa de morrer afogada. Pois ben, isto é o que fai a luz para ir de A cara a B cando cambia de medio de propagación".

Pódese ver a explicación matemática do Principio de Fermat en http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/OptGeometrica/index.htm

O medio superior aire (que equivale no exemplo anterior á zona de terra onde corremos máis rápido) ten de índice de refracción n_1 e o outro medio (auga) n_2 . A velocidade da luz é c e a velocidade en cada medio v_1 e v_2.

Así $t = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2} = n_1 \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c} + n_2 \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c}$

Derivamos e obtemos a Lei de Snell da refracción (ver detalles na páxina web citada). Un bonito exemplo de problema de máximos e mínimos que se pode ver nun dos carteis da exposición "Explorando coa luz" que percorreu moitos institutos de Galicia nos dous últimos anos, e que se inclúe a continuación.
Pero agora volvamos ao problema de paseo matemático que nos incumbe, -despois dos antecedentes xa vistos-, o camiño máis curto do socorrista na praia.

Seguindo a idea e o problema de Feyman
O socorrista corre máis rápido do que pode nadar, e debe chegar o máis rápido posible xunto ao bañista. Hai dúas opcións obvias:

1) Ir en liña recta en dirección ao bañista. Todos sabemos que a distancia máis curta entre dous puntos é unha liña recta, polo que isto parece unha boa estratexia.
2) Ir cara o punto da beira da auga no que incide a liña perpendicular que parte da posición do bañista. Este é o camiño que require a cantidade mínima de natación do socorrista polo que tampouco é mala idea.

Pero a ruta máis rápida está entre estas dúas:
Esta ruta de salvamento segue o mesmo camiño que un feixe de luz refractándose entre dous medios, como aire e cristal. Cando a luz pasa do aire ao cristal enlentécese polo que a ruta que segue a luz entre dous puntos e a que lle leva o tempo mínimo e non a que o leva en liña recta.

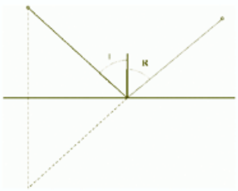
Seguindo a fórmula de Snell $\frac{\text{sen(i)}}{\text{sen(r)}} = \frac{v_{area}}{v_{auga}}$, no caso dos socorristas i é o ángulo de incidencia (co que entra o socorrista na auga, medido desde a perpendicular á costa) e r é o ángulo de reflexión (o ángulo que debe seguir o socorrista na auga, medido do mesmo xeito que i, coa perpendicular).

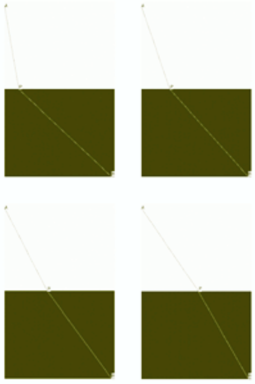
O principio de Fermat

Principio de Fermat do tempo mínimo: O camiño que, entre todos os posibles, segue un raio de luz para ir dun punto a outro, é aquel no que a luz emprega un tempo mínimo.

Herón de Alexandría

(250 d.C.) case descubríu o Principio de Fermat ao dicir que a luz ao reflectirse segue a mínima traxectoria posible. Mira a figura da dereita e pensa como se pode demostrar que se o ángulo de incidencia = ángulo de reflexión a traxectoria é mínima.





Refracción

Nas imaxes ves distintas posibilidades de camiños. A de tempo mínimo é a que cumpre a lei de Snell.

Gráfica do tempo cando variamos o punto P

Pierre de Fermat

(17 de agosto do 1601 - 12 de xaneiro do 1665) foi un xurista no Parlamento de Toulouse, no sur de Francia.

Lei de Snell da refracción:

A lei da refracción da luz: o seno do ángulo de incidencia, sen i, e o seno do ángulo de refracción, sen r, dun raio luminoso que atravesa a superficie de separación de dous medios transparentes están na mesma proporción para calquera valor do ángulo i; isto é, $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n$

Por exemplo, se a luz pasa do aire á auga, $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = 4/3$

Feynman explica así o Principio de Fermat:

"Imaxina que nos atopamos na costa lonxe do bordo, nun punto A, e no mar unha persoa cae dunha barca nun punto B.

Nosoutros vemos o accidente e podemos acudir correndo e despois nadando.

Que facemos? Imos en liña recta? Si, sen dúbida! Con todo, se usáramos un pouco máis a intelixencia daríamonos conta de que é vantaxoso correr unha distancia un pouco maior por terra para diminuír a distancia que debemos nadar, porque nos movemos máis lentamente polo mar que pola terra. É preferible percorrer un maior camiño pola costa para tardar o menor tempo posible xa que esta é a magnitude que interesa para salvar á persoa de morrer afogada. Pois ben, isto é o que fai a luz para ir de A cara a B cando cambia de medio de propagación".

Fermat como matemático:

descobre a xeometría analítica un ano antes que Descartes e é o precursor do cálculo diferencial co seu método de atopar as ordenadas máis pequenas e máis grandes dunha liña curva, así como as tanxentes a polinomios. As súas brillantes investigacións na teoría de números fano acredor do rango de fundador da teoría moderna de números. A través da súa correspondencia con Blaise Pascal, foi o cofundador da teoría da probabilidade.

A casa de Beaumont-de-Lomagne (a 58km de Toulouse) onde naceu Fermat; agora o museo Fermat. A súa estatua no mesmo pobo.

O derradeiro teorema de Fermat

é un dos máis famosos teoremas na historia das matemáticas. Establece que "Non hai números enteiros positivos x, y, e z tales que $x^n + y^n = z^n$ onde n é un número natural maior ca 2".

Pierre de Fermat escribiu iso en 1637 na súa copia da tradución de Claude-Gaspar Bachet da famosa Aritmética de Diofanto e tamén que "Teño unha verdadeiramente marabillosa proba desta proposición que non cabe na marxe do libro"; en latín: "Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.". Non obstante os esforzos realizados por moitos matemáticos, a proba correcta tardou 357 anos... e foi feita por Andrew Willis en 1995.

AGAPEMA