γ_1
GAMMA
setembro 2001

Esferas e medias

Manuel Díaz Regueiro. IES Xoán Montes.

Sexan m_i (i=1,...,s) números reais. Sexan P_1,..... ,$P_i=(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \ldots, x_{in})$,....., P_s puntos de R^n. O lugar xeométrico dos puntos P de R^n tales que

$$\sum_{i=1}^{s} m_i \left|\overline{PP_i}\right|^2 = K \qquad [1]$$

, é unha esfera (real ou imaxinaria) ou un hiperplano, ou todo R^n .

Sexa $M = \sum_{i=1}^{s} m_i$. Sexa $\overline{x_j} = \dfrac{\sum_{i=1}^{s} m_i x_{ij}}{M}$ se $M \neq 0$ ou $\overline{x_j} = \sum_{i=1}^{s} m_i x_{ij}$ se M=0 .

Sexa $\overline{x_j^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{s} m_i x_{ij}^2}{M}$ se $M \neq 0$ ou $\overline{x_j^2} = \sum_{i=1}^{s} m_i x_{ij}^2$ se M=0 .

Definimos $s_j^2 = \overline{x_j^2} - \overline{x_j}^2$

Sexa P=(x_1, x_2, x_3, ..., x_n). A condición [1] proposta desenvolvida dá $\sum_{i=1}^{s} m_i \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{ij})^2 \right) = K$

así $\sum_{i=1}^{s} m_i \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j^2 - 2x_j x_{ij} + x_{ij}^2) \right) = K$

logo $M\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 2\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{s} m_i x_{ij} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{s} m_i x_{ij}^2 \right) = K$

se $M \neq 0$, dividindo por M

$$\sum_{i=1}^{n} x_j^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_j \overline{x_j} + \sum_{i=1}^{n} \overline{x_j^2} = K$$

así,

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x_j})^2 + \overline{x_j^2} - \overline{x_j}^2 = K$$

ou por último, $\sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x_j})^2 + s_j^2 = K$

Polo tanto, o lugar xeométrico é unha esfera de centro $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots \overline{x}_n)$ e radio $R^2 = K - \sum_{i=1}^{n} s_j^2$

Segundo os valores de K, a esfera será real, un punto, ou unha esfera imaxinaria.

Se M=0, o lugar xeométrico cumpre

$$-2\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{x}_j + \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j^2} = K$$

,que é un hiperplano de vector ortogonal $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots \overline{x}_n)$

Se $\overline{x}_j = 0 \ \ \forall j$ e $\sum_{j=1}^{n} \overline{x_j^2} \neq K$

o lugar xeométrico non contén puntos e se $\sum_{j=1}^{n} \overline{x_j^2} = K$ tódolos puntos de R^n están no lugar xeométrico.

Como exemplo imos probar que: **Catro puntos de R^n forman un rectángulo, se e só se, dado outro punto P calquera, cúmprese que**

$$\left|\overline{PP_1}\right|^2 + \left|\overline{PP_3}\right|^2 = \left|\overline{PP_2}\right|^2 + \left|\overline{PP_4}\right|^2$$

Pensando en R^2, para facilitar a comprensión, teríamos unha ecuación da forma Ax+By+C=0, que se cumpre para calquera , x e y, o cal implica que a única posibilidade é que A=0 , B=0 e C=0.

Polo que xa temos visto, esa condición implica que $x_{1j} + x_{3j} = x_{2j} + x_{4j}$

Do cal dedúcese que $\overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_2P_3}$ $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}$ e que $\overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{P_1P_4} + \overrightarrow{P_1P_2}$

é dicir, os catro puntos forman un paralelogramo.

Tamén implica que $\sum_{i=1}^{n} x_{1j}^2 + x_{3j}^2 - x_{2j}^2 - x_{4j}^2 = 0$

Sen perder xeralidade podemos supoñer que

$x_{1j}=0$, co cal teríamos que x_{2j} serían as coordenadas de $\overrightarrow{P_1P_2}$, por exemplo, e obtemos que

$$\left|\overrightarrow{P_1P_3}\right|^2=\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right|^2+\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2$$ ou ben que $x_{2j}=0$

$$\left|\overrightarrow{P_2P_4}\right|^2=\left|\overrightarrow{P_2P_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|^2$$

das que deducimos que os catro puntos forman un rectángulo.

Se os catro puntos forman un rectángulo, de

$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{P_4P_3}$ xa resulta $x_{1j}+x_{3j}=x_{2j}+x_{4j}$;

e de $\left|\overrightarrow{P_1P_3}\right|^2=\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right|^2+\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2$

supoñendo que $x_{1j}=0$ resulta

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}^2+x_{3j}^2-x_{2j}^2-x_{4j}^2=0$$

Polo tanto, para todo P,

$$\left|\overrightarrow{PP_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{PP_3}\right|^2=\left|\overrightarrow{PP_2}\right|^2+\left|\overrightarrow{PP_4}\right|^2$$

Como consecuencia, en toda pirámide de base rectangular, a suma dos cadrados das distancias do vértice da pirámide aos vértices opostos da base rectangular, é igual para as dúas posibles, independentemente da altura e posición do vértice.

A ESFERA MEDIA

1-Dados os puntos$P_1,\ldots,P_i=(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3},\ldots, x_{in}),\ldots, P_s$ de R^n. Sexa d_i a distancia de P_i a outro punto P. O punto P que fai mínima $\sum_{i=1}^{s} d_i^2$ é o baricentro de $P_1,\ldots,P_i,\ldots, P_s$.

$$\sum_{i=1}^{s} d_i^2=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-x_j)^2\right)=d$$

derivando respecto a x_j (j=1,2,...n) e igualando a cero,

$$2\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_{ij})=0$$ de onde $$\overline{x_j}=\frac{x_{1j}+\ldots+x_{sj}}{s}$$

Ademáis $D_iD_j\, d=\partial_{ij}.2.s$

polo que é no baricentro onde d ten o mínimo.

2- De tódalas esferas de radio r, aquela para que a suma das potencias dos puntos P_i respecto a ela é minima, é a que ten por centro o baricentro. E é nula a suma das potencias se $r^2=\sum_{j=1}^{n} s_j^2$

Fixado r, queremos facer mínimo $d=\sum_{j=1}^{n}(d_i^2-r^2)$ que polo visto en [1], será mínimo cando o punto P, o centro, sexa o baricentro. Ademais, cando

$$r^2=\frac{d_1^2+\ldots+d_s^2}{s}$$

é dicir, r é a media cuadrática das distancias d_i dos puntos P_i ao centro, entón d=0.

Do feito que $\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\overline{x}_j)^2-r^2\right)=d$

tamén se deduce que $r^2=\sum_{j=1}^{n} s_j^2$

É certo que, dados s puntos, en xeral, non pasa unha esfera por tódolos puntos. Pero a condición de que un punto esteña nunha esfera (que a súa potencia respecto a dita esfera sexa 0) podemos tomala en "media". Así:

3-A esfera para a cal a suma das potencias dos outros s puntos a ela é cero,e, entre tódalas que cumpren a condición anterior, ten radio mínimo, é a esfera media de [2].

Se o seu centro é $(w_1,\ldots, w_n)$.

A primeira condición implica que $r^2=\sum_{j=1}^{n}\frac{\sum_{i=1}^{s}\left(x_{ij}-w_j\right)^2}{s}$

Impoñéndolle a segunda condición, que r^2 sexa mínimo, obtense que $w_j=\overline{x}_j$

4-Por todo o visto anteriormente, a esfera media é o lugar xeométrico dos puntos P que cumpren que

$$\sum_{i=1}^{s}\left|\overrightarrow{PP_i}\right|^2=2.\left(\sum_{j=1}^{n} s_j^2\right)$$