Suma de distancias ó cadrado.

Jesús Calvo Rovira e Manuel Díaz Regueiro.
IES Xoán Montes.

Dados 2 conxuntos de *m* puntos de R^n ,$\{A_i\}$ e $\{B_i\}$, *se a suma dos cadrados das distancias desde calquera punto de R^n ós puntos de cada conxunto é a mesma, os dous conxuntos de puntos teñen o mesmo baricentro.*

Sexa O o baricentro do primeiro conxunto e P un punto arbitrario de R^n. PO=v , $OA_i=v_i$, $OB_i=w_i$

$$i)\sum \overline{PA_i}^2 = \sum \|v-v_i\|^2 = \sum v^2 - 2v\sum v_i + \sum v_i^2$$
$$ii)\sum \overline{PB_i}^2 = \sum \|v-w_i\|^2 = \sum v^2 - 2v\sum w_i + \sum w_i^2$$

$\sum v_i = 0$ por definición de baricentro (supoñendo que O é a orixe de coordenadas)
Se i) = ii) para todo v, tomando v=0, $\sum v_i^2 = \sum w_i^2$, e polo tanto ó ser certo para todo valor de v. De i)=ii) $\sum w_i = 0$, é dicir O é tamén o baricentro dos B_i.

Poñendo + en vez de - nas fórmulas i) e ii) daríanos outra propiedade algo distinta-se ó trasladar os dous conxuntos de puntos cun vector arbitrario v a suma dos módulos ó cadrado dos vectores resultantes coincide $\sum \|v+v_i\|^2 = \sum \|v+w_i\|^2$ entón os dous conxuntos de puntos teñen o mesmo baricentro, e a suma dos módulos ó cadrado de cada un dos conxuntos de vectores coincide.

Ó xirar un ángulo arbitrario *m* puntos $\{v_i\}$ ó redor do seu baricentro resulta que os novos puntos obtidos $\{w_i\}$ cumpren que a suma dos cadrados das distancias a calquera punto de R^n é a mesma que a dos puntos orixinais, xa que o baricentro dos dous conxuntos coincide e cada v_i ten o mesmo módulo que w_i, polo que $\sum v_i^2 = \sum w_i^2$, e polo tanto i)=ii).

Pola mesma razón que nun xiro, se escollemos *m* puntos e lles aplicamos un movemento que deixe invariante o seu baricentro os puntos transformados de vector de posición w_i co mesmo módulo que v_i e conservan o mesmo baricentro polo que para todo vector v de posición dun punto arbitrario P
$\sum \|v-v_i\|^2 = \sum \|v-w_i\|^2$

Polo que podemos afirmar que, dados *m* puntos en R^n, a diferencia da suma de distancias ó cadrado de calquera punto de R^n a *m* puntos do mesmo e ó mesmo conxunto de puntos transformado por un xiro (ou a un movemento que conserve o baricentro, simetría respecto ó baricentro, reflexión nunha recta pasando polo baricentro, etc..) respecto ó seu baricentro é cero.

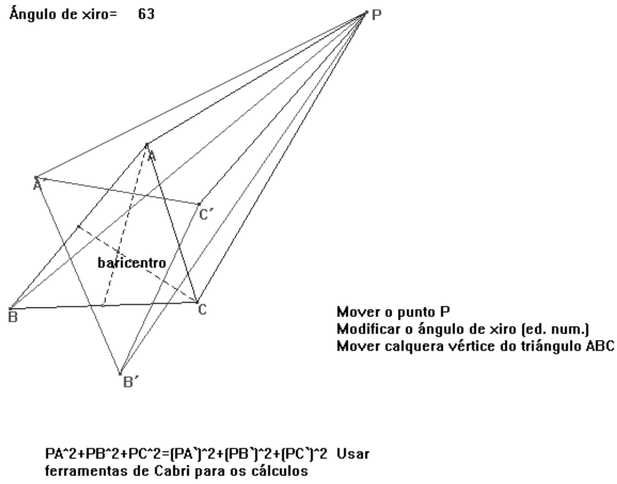
En particular, se os puntos forman un polígono, poliedro ou politopo regular de R^n, a suma de distancias ó cadrado desde calquera punto P restada á suma de distancias ó cadrado desde o mesmo punto a un poliedro ou politopo regular xirado (ou simétrico respecto ó baricentro, etc...) do anterior -con centro o baricentro- é cero. No caso de que o polígono, poliedro ou politopo (regular ou non) de R^n teña 2*p* puntos simétricos dous a dous respecto ó baricentro sempre é posible escoller *p* vértices de modo que os seus simétricos respecto ó centro sexan os *p* vértices restantes do poliedro e o baricentro común ós conxuntos de *p* puntos sexa o baricentro dos 2*p* puntos. Dese modo queda dividido en dous conxuntos de puntos nos que a suma das distancias ó cadrado desde calquera punto de R^n é a mesma.

En particular, se *p*=2 , os segmentos que unen 2 puntos simétricos son iguais e se cortan no punto medio (baricentro de cada par de puntos), os 4 puntos forman un rectángulo.

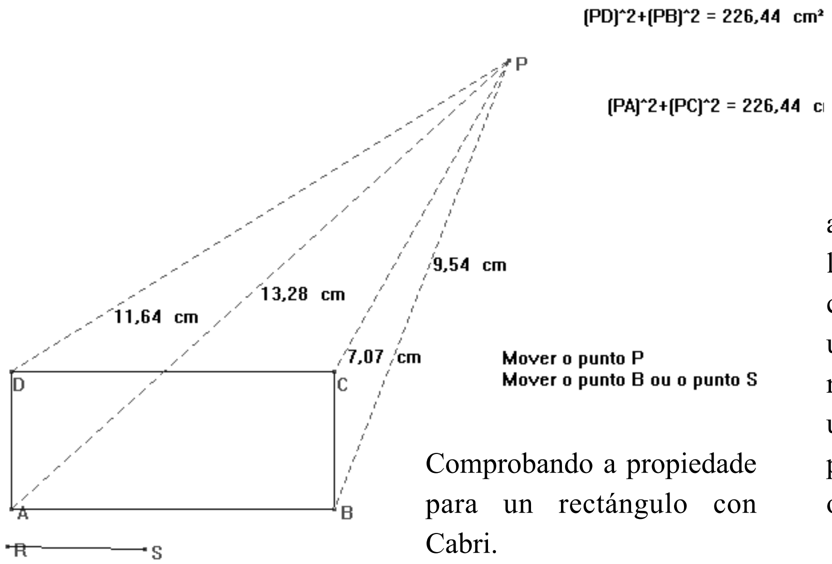
Para que cumpran a condición 4 e 4 puntos no espacio tridimensional, non é necesario que formen un paralelepípedo recto. Ó xirar calquera corpo ó redor do seu baricentro a nova figura obtida cumpre a condición de que a suma......, independentemente de que sexa un sólido regular ou non.

Polo visto anteriormente, o rectángulo é o único caso de *m* puntos de R^n nos que se cumpre que a suma de distancias ó cadrado a puntos alternados (*m*/2) coincide se e só se.

Ben, isto visto dende o punto de vista formal. En realidade, este texto é o resumo das experiencias e discusións que os autores tivemos fundamentalmente usando Cabri, e onde os resultados están postos dos revés. En primeiro lugar obtivemos e discutimos que un hexágono regular e un hexágono regular xirado tiñan a propiedade. Despois chegamos a ver que



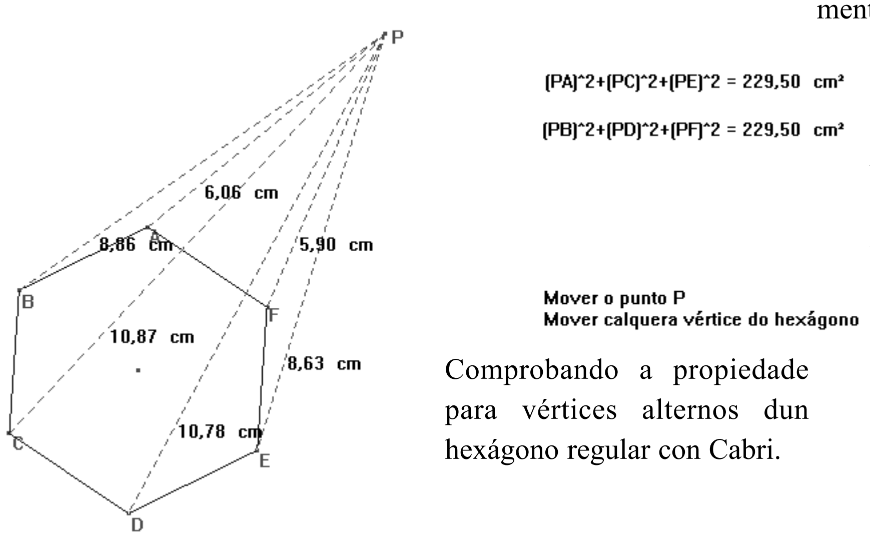
Comprobando que un triángulo e outro xirado do anterior respecto ó baricentro común cumpre a propiedade.



Comprobando a propiedade para un rectángulo con Cabri.

abondaba con que fose un triángulo equilátero e o mesmo triángulo xirado respecto ó centro. Logo, como se pode ver na figura, utilizamos Cabri para comprobar que, en realidade con calquera outro triángulo e máis un triángulo xirado do anterior cúmprese a propiedade. E seguimos investigando con outras situacións.

Partindo, xa que logo, das *Esferas e medias* do GAMMA nº 1, chegamos a albiscar unha serie de novas propiedades, fundamentalmente no plano, pero que, desde logo, é máis satifactorio comprobar que se cumpren utilizando unha ferramenta coma o Cabri, que se pode usar e a usamos con alumnos de primeiro da ESO. E, como conta Miguel de Guzmán no libro que se reseña neste número de GAMMA, experimentando.



Comprobando a propiedade para vértices alternos dun hexágono regular con Cabri.