γ 4
GAMMA
setembro 2004

Lendo *Fibonacci*

Manuel Díaz Regueiro

1-O problema

Ricardo Moreno conta no seu libro de *Fibonacci* como Xoán de Palermo e Teodoro, filósofos do séquito do emperador Federico II, propóñenlle varios problemas a Fibonacci, comentando que non se coñece como chegou á solución da ecuación de terceiro grao $x^3+2x^2+10x=20$, nun deles.

A verdade é que o que hei contar aquí consiste en pequenas contribucións que xurdiron da lectura dese libro e outras que exemplifican como a historia pode promover a reflexión en matemáticas.

Desde logo é difícil pensar que coñecera as fórmulas da solución da ecuación de terceiro grao que descubriron compatriotas posteriores. E dentro dos métodos numéricos non ía coñecer a regula falsi ou o método de Newton. Si podería utilizar, quizais, o método da bisección.

Sen embargo, polo menos desde Herón, era coñecido o método de iteración: para resolver $x^2=A$, resolvemos $x=(A/x+x)/2$ (a mesma ecuación, pese a súa distinta expresión) iterando desde o valor 1. Un método que, por outra banda, eu sinalaría como preferible a ensinar o cálculo da raíz cadrada cun algoritmo “máxico” ou de moi difícil explicación como o que aínda se está a ensinar nas escolas, perfectamente xeneralizable ao cálculo da raíz enésima $x^n=A$, xa que nos daría $x=(A/x^{n-1}+x)/2$ e perfectamente exemplificable cunha calculadora ou cun ordenador, que, por outro lado, fan innecesario o seu cálculo.

Se educación é o que queda cando esquecemos todo o que nos ensinaron, como dixo un ministro inglés hai séculos, o método de Herón ten moito máis de educativo co método da raíz cadrada “escolar” en tanto que facilmente reproducible, inesquecible e de moita menor complexidade.

Pois ben volvendo a Fibonacci é posible que resolvera a ecuación por iteración $x=20/(x^2+2x+10)$

Se o implementamos nun programa de ordenador de poucas liñas- en Pascal, temos

```
x:=1;x1:=2;
while abs(x-x1)>1e-15 do
begin
x:=x1;
x1:=x/(x2+2x+10);
end;
```

en poucos pasos a resposta 1,36880810782137. Que curiosamente difire a partir da sexta cifra da de Fibonacci. Comentando isto con Ricardo suxire que foi algún erro do copista do libro de Fibonacci, máis que do propio Fibonacci, e que Woecke coincide con ese valor da solución e que podería ser ese o método de cálculo feito por Fibonacci.

Queda pois, finalmente, un bo exemplo de que preguntarse ¿Como poido resolver este problema, como o faría Fibonacci? Pode dar moito máis xogo na clase que indo ao último programa de ordenador a buscar a solución.

2-SUMAS TELESCÓPICAS XENERALIZADAS

Aplicando sumas telescópicas é posible calcular $F_1 + F_2+F_3+...+F_n$ e $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ ... \ + \ F_n^2$ sendo F_k os números de Fibonacci. Nas sumas telescópicas habituais é posible colocalas en dúas columnas nas que as diagonais dan suma cero. ¿Qué pasa se en vez de dúas collemos n columnas?. Vexamos un exemplo.

A suma de $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ é calculable telescopicamente cando $P(x)$ e $Q(x)$ son polinomios tales que grao($P(x)$)<grao(Q(x))-1 = n-1 e Q(x) ten n raíces (i = 1,..., n). Ademais o sumatorio comeza nun número que exclúa toda anulación do denominador.

Dado que as n raíces do denominador son distintas: .

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

Polo que $P(x)=A_1(x-a_2)\ldots(x-a_n)+\ldots+A_n(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})$ e como $P(x)$ ten un grao menor de n-1, necesariamente $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 0$.

Como

$$\frac{P(1)}{Q(1)} = \frac{A_1}{1-a_1} + \frac{A_2}{-a_1} + \ldots + \frac{A_n}{-a_1-n}$$

$$\frac{P(2)}{Q(2)} = \frac{A_1}{2-a_1} + \frac{A_2}{1-a_1} + \ldots + \frac{A_n}{-a_1-n+1}$$

....

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{A_1}{n-a_1} + \frac{A_2}{n-a_1-1} + \ldots + \frac{A_n}{-a_1-1}$$

Vemos que a suma dos coeficientes da diagonal é nula, e o mesmo pasa coas seguintes.

Polo que esa suma infinita dá igual á suma das diagonais, que sempre suman cero máis as n primeiras diagonais incompletas. Logo o resultado final é a suma desas primeiras diagonais incompletas.

Deste xeito, xorden os casos particulares:

$$\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x(x-1)} = 1$$, xa que (suma telescópica simple)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \ldots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

$$\sum_{x=3}^{\infty} \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{4}$$, xa que, neste caso, A_1 = 1/2, A_2 = -1, A_3 = 1/2

$$\frac{1}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2} + \ldots = \frac{-1}{2} + \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$$

Este resultado pode xeneralizarse sempre que as raíces do denominador estean en progresión aritmética, (i = 1,..., n) .

A verdade que este pequeno exemplo xurdiu da lectura de “Fibonacci” de Ricardo Moreno. E responde, tanxencialmente á pregunta: Dado que todo nº racional pode expresarse como suma de fraccións de numerador 1. ¿É certo que tamén todo nº irracional o é? Parece claro que o é de infinitos sumandos. Pero toda suma de infinitos sumandos de fraccións dese tipo- fraccións exipcias se lle chaman noutra bibliografía- non ten porque ser necesariamente un número irracional. Para exemplo, o citado antes. Xorde a pregunta, que deixamos ao lector, de cales son esas excepcións e que teñen que ver coas sumas telescópicas.

Nas páxinas 158-161 de G. Polya (1966) fanse varias demostracións de que .

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \ldots + \frac{1}{4n^2-1} = \frac{n}{2n+1}$$

Entre elas, a máis breve, é a que utiliza unha descomposición telescópica (aínda que neste caso tense que ter en conta que non é unha suma infinita senón finita).

Seguindo a Apostol (1965) poderíamos definir estas series a_n tales que existen outras series b_{in} (i=1...k) tales que $a_n=b_{1n}+b_{2n}+\ldots+b_{kn}$ e que cumpren que $b_{1n}+b_{2n+1}+\ldots+b_{kn+k-1}=0$ (as sumas diagonais son cero). Entón $\Sigma\, a_n$=Suma das k-1 primeiras diagonais incompletas (con menos de k sumandos). Se a suma é de n sumandos será igual a suma das k-1 primeiras diagonais incompletas e das k-1 últimas diagonais incompletas.

Bibliografía.

Ricardo Moreno Castillo (2004). *Fibonacci*. Editorial Nivola, Madrid.

George Polya (1966). *Matemática y razonamiento plausible*. Editorial Tecnos SA. Madrid.

Tom M. Apostol. (1965). *Calculus. Volumen I.* Editorial Reverté, Barcelona.