



Esferas e medias

Manuel Díaz Regueiro. IES Xoán Montes.

Sexan m_i ($i=1, \dots, s$) números reais. Sexan P_1, \dots, P_s puntos de \mathbb{R}^n . O lugar xeométrico dos puntos P de \mathbb{R}^n tales que

$\sum_{i=1}^s m_i |\overline{PP_i}|^2 = K$ [1], é unha esfera (real ou imaxinaria) ou un hiperplano, ou todo \mathbb{R}^n .

Sexa $M = \sum_{i=1}^s m_i$. Sexa $\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^s m_i x_{ij}}{M}$

se $M \neq 0$ ou $\bar{x}_j = \sum_{i=1}^s m_i x_{ij}$ se $M=0$.

Sexa $\bar{x}_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^s m_i x_{ij}^2}{M}$ se $M \neq 0$ ou $\bar{x}_j^2 = \sum_{i=1}^s m_i x_{ij}^2$ se $M=0$.

Definimos $s_j^2 = \bar{x}_j^2 - \bar{x}_j^{-2}$

Sexa $P=(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. A condición [1]

proposta desenvolvida dá $\sum_{i=1}^s m_i \left(\sum_{j=1}^n (x_j - x_{ij})^2 \right) = K$

así $\sum_{i=1}^s m_i \left(\sum_{j=1}^n (x_j^2 - 2x_j x_{ij} + x_{ij}^2) \right) = K$

logo $M \sum_{j=1}^n x_j^2 - 2 \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^s m_i x_{ij} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^s m_i x_{ij}^2 \right) = K$

se $M \neq 0$, dividindo por M

$\sum_{j=1}^n x_j^2 - 2 \sum_{j=1}^n x_j \bar{x}_j + \sum_{j=1}^n \bar{x}_j^2 = K$

así,

$\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_j)^2 + \bar{x}_j^2 - \bar{x}_j^{-2} = K$

ou por último, $\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_j)^2 + s_j^2 = K$

Polo tanto, o lugar xeométrico é unha esfera de centro $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ e radio $R^2 = K - \sum_{j=1}^n s_j^2$

Segundo os valores de K , a esfera será real, un punto, ou unha esfera imaxinaria.

Se $M=0$, o lugar xeométrico cumpre

$$-2 \sum_{j=1}^n x_j \bar{x}_j + \sum_{j=1}^n \bar{x}_j^2 = K$$

,que é un hiperplano de vector ortogonal $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$

Se $\bar{x}_j = 0 \forall j$ e $\sum_{j=1}^n \bar{x}_j^2 \neq K$

o lugar xeométrico non contén puntos e se

$\sum_{j=1}^n \bar{x}_j^2 = K$ tódolos puntos de \mathbb{R}^n están no lugar xeométrico.

Como exemplo imos probar que: **Catro puntos de \mathbb{R}^n forman un rectángulo, se e só se, dado outro punto P calquera, cúmprese que**

$$|\overline{PP_1}|^2 + |\overline{PP_3}|^2 = |\overline{PP_2}|^2 + |\overline{PP_4}|^2$$

Pensando en \mathbb{R}^2 , para facilitar a comprensión, teríamos unha ecuación da forma $Ax+By+C=0$, que se cumpre para calquera x e y , o cal implica que a única posibilidade é que $A=0$, $B=0$ e $C=0$.

Polo que xa temos visto, esa condición implica que $x_{1j} + x_{3j} = x_{2j} + x_{4j}$

Do cal dedúcese que $\overline{P_1P_4} = \overline{P_2P_3}$ $\overline{P_1P_2} = \overline{P_4P_3}$

e que $\overline{P_1P_3} = \overline{P_1P_4} + \overline{P_4P_2}$

é dicir, os catro puntos forman un paralelogramo.

Tamén implica que $\sum_{i=1}^n x_{1j}^2 + x_{3j}^2 - x_{2j}^2 - x_{4j}^2 = 0$

Sen perder xeralidade podemos supoñer que

$x_{1j}=0$, co cal teríamos que x_{2j} serían as coordenadas de $\overline{P_1P_2}$, por exemplo, e obtemos que

$$\left| \overline{P_1P_3} \right|^2 = \left| \overline{P_1P_4} \right|^2 + \left| \overline{P_1P_2} \right|^2 \quad \text{ou ben que } x_{2j}=0$$

$$\left| \overline{P_2P_4} \right|^2 = \left| \overline{P_2P_1} \right|^2 + \left| \overline{P_2P_3} \right|^2$$

das que deducimos que os catro puntos forman un rectángulo.

Se os catro puntos forman un rectángulo, de

$$\overline{P_1P_2} = \overline{P_4P_3} \quad \text{xa resulta } x_{1j} + x_{3j} = x_{2j} + x_{4j};$$

$$\text{e de } \left| \overline{P_1P_3} \right|^2 = \left| \overline{P_1P_4} \right|^2 + \left| \overline{P_1P_2} \right|^2$$

supoñendo que $x_{1j}=0$ resulta

$$\sum_{j=1}^n x_{1j}^2 + x_{3j}^2 - x_{2j}^2 - x_{4j}^2 = 0 \quad \text{Polo tanto, para todo P,}$$

$$\left| \overline{PP_1} \right|^2 + \left| \overline{PP_3} \right|^2 = \left| \overline{PP_2} \right|^2 + \left| \overline{PP_4} \right|^2$$

Como consecuencia, en toda pirámide de base rectangular, a suma dos cadrados das distancias do vértice da pirámide aos vértices opostos da base rectangular, é igual para as dúas posibles, independentemente da altura e posición do vértice.

A ESFERA MEDIA

1-Dados os puntos $P_1, \dots, P_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{in}), \dots, P_s$ de \mathbb{R}^n . Sexa d_i a distancia de P_i a outro punto P . O punto P que fai mínima

é o baricentro de $P_1, \dots, P_i, \dots, P_s$.

$$\sum_{i=1}^s d_i^2 = \sum_{i=1}^s \left(\sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_j)^2 \right) = d$$

derivando respecto a x_j ($j=1,2,\dots,n$) e igualando a cero,

$$2 \sum_{j=1}^n (x_j - x_{ij}) = 0 \quad \text{de onde } \overline{x_j} = \frac{x_{1j} + \dots + x_{sj}}{s}$$

Ademáis $D_i D_j d = d_{ij} \cdot 2 \cdot s$

polo que é no baricentro onde d ten o mínimo.

2- De tódalas esferas de radio r , aquela para que a suma das potencias dos puntos P_i respecto a ela é mínima, é a que ten por centro o baricentro. E é nula a suma das potencias se $r^2 = \sum_{j=1}^n s_j^2$

Fixado r , queremos facer mínimo $d = \sum_{j=1}^n (d_i^2 - r^2)$ que polo visto en [1], será mínimo cando o punto P , o centro, sexa o baricentro. Ademais, cando

$$r^2 = \frac{d_1^2 + \dots + d_s^2}{s}$$

é dicir, r é a media cuadrática das distancias d_i dos puntos P_i ao centro, entón $d=0$.

Do feito que $\sum_{i=1}^s \left(\sum_{j=1}^n (x_{ij} - \overline{x_j})^2 - r^2 \right) = d$

tamén se deduce que $r^2 = \sum_{j=1}^n s_j^2$

É certo que, dados s puntos, en xeral, non pasa unha esfera por tódolos puntos. Pero a condición de que un punto esteña nunha esfera (que a súa potencia respecto a dita esfera sexa 0) podemos tomala en "media". Así:

3-A esfera para a cal a suma das potencias dos outros s puntos a ela é cero, e, entre tódalas que cumpren a condición anterior, ten radio mínimo, é a esfera media de [2].

Se o seu centro é (w_1, \dots, w_n) .

A primeira condición $r^2 = \frac{\sum_{i=1}^s (x_{ij} - w_j)^2}{s}$ implica que

Impoñéndolle a segunda condición, que r^2 sexa mínimo, obtense que $w_j = \overline{x_j}$

4-Por todo o visto anteriormente, a esfera media é o lugar xeométrico dos puntos P que cumpren que

$$\sum_{i=1}^s \left| \overline{PP_i} \right|^2 = 2 \cdot \left(\sum_{j=1}^n s_j^2 \right)$$