



# dous máis dous son cinco.

**Manuel Díaz Regueiro. IES Xoán Montes.**

*¿Por qué, oh deuses, dúas e dúas han ser catro?. Alexander Pope.*

Se a un matemático lle din que dúas máis dúas son dez, ou once, inmediatamente dirá: si, en base 4 ou 3. Pero non está tan claro que saiba responder ó feito de que dúas máis dúas sexan cinco. E sen embargo, podería dicir, a pesar do uso común da frase con significado de absurdo, antinatural, ou de falso, que si, é certo, e de infandas maneiras. Disto imos tratar nas liñas seguintes.

Como primeira idea, e seguindo a Hermann von Helmholtz no seu "Contar e medir", é moi problemática a aplicación automática das leis aritméticas ós fenómenos físicos. Vexamos algúns exemplos: en Química, se un toma dous volumes de hidróxeno e un de osíxeno obtéñense dous volumes de vapor de auga. Un cuarto de alcohol e un cuarto de auga son 1,8 cuartos de mestura. Tres culleradas de auga e unha cullerada de sal non son catro culleradas. Unha pinga de auga unida a outra pinga non dan lugar a dúas pingas. Como sinalaba H. Lebesgue, se poñemos un león e un coello nunha gaiola non se pode esperar que máis tarde haxa dous animais na gaiola.[2].

¿Sobre que convenio podemos afirmar que  $2+2=5$ ? Sobre o que esteamos falando do conxunto de números reais, con estrutura de corpo, pero non naturalmente do canónico, sino dun isomorfo a ese no que os "nomes" están cambiados. É dicir, supoñamos, unha aplicación bixectiva  $f: R \rightarrow R'$ , sendo  $R'$  exactamente o mesmo conxunto que  $R$ , pero no que imos definir as dúas operacións que lle dan estrutura de corpo, a suma e a multiplicación do modo seguinte:  $x \Delta y = f^{-1}(f(x)+f(y))$  e  $x * y = f^{-1}(f(x).f(y))$ .

O primeiro que se pode demostrar é que, dado

que  $R$  é un corpo, tamén o será  $R'$  Por exemplo, a propiedade distributiva da multiplicación respecto á suma demóstrase:

$$x * (y \Delta z) = f^{-1}(f(x).f(f^{-1}(f(y)+f(z)))) = f^{-1}(f(x).(f(y)+f(z))) = f^{-1}(f(x).f(y)+f(x).f(z)) = f^{-1}(f(f^{-1}(f(x).f(y)))+f(f^{-1}(f(x).f(z)))) = x * y \Delta x * z.$$

E o elemento neutro da suma é  $f^{-1}(0)$ , xa que  $x \Delta f^{-1}(0) = f^{-1}(f(x)+f(f^{-1}(0))) = f^{-1}(f(x)+0) = f^{-1}(f(x)) = x$ , o mesmo que  $f^{-1}(1)$  é o elemento neutro da multiplicación, pois  $x * f^{-1}(1) = f^{-1}(f(x).f(f^{-1}(1))) = f^{-1}(f(x).1) = f^{-1}(f(x)) = x$ .

O elemento simétrico dun elemento  $x$  respecto á suma é  $f^{-1}(-f(x))$ , pois  $x \Delta f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(x)+f(f^{-1}(-f(x)))) = f^{-1}(f(x)-f(x)) = f^{-1}(0)$ ,

Dado  $f(x)$ , o seu simétrico respecto á multiplicación é  $f^{-1}(1/f(x))$ , posto que  $x * f^{-1}(1/f(x)) = f^{-1}(f(x).f(f^{-1}(1/f(x)))) = f^{-1}(f(x).1/f(x)) = f^{-1}(1)$ .

As demais propiedades demóstranse de igual forma, e poden facerse como exercicio, ou ler [1], onde se dá o teorema de definición por isomorfía que di que : Se  $R$  é un sistema alxebraico (grupo, anel, corpo, espacio vectorial, etc) e  $M$  un conxunto, entre os que se estableceu unha bixección  $I$ , é posible definir unha estrutura alxebraica en  $M$  de modo que se obteña un sistema alxebraico isomorfo a  $R$ . (E esta definición é a que xa vimos).

Volvendo agora á situación orixinal, aplicacións bixectivas do conxunto  $R$  no corpo dos números reais, as máis sinxelas que se nos pode ocorrer son as  $f(x)=ax+b$ , das que se deducen as operacións

$$x \Delta y = ((ax+b)+(ay+b)-b)/a = x+y+b/a \quad \text{e} \\ x * y = ((ax+b).(ay+b)-b)/a \quad \text{as cales dotan a } R \text{ de estrutura de corpo e, si } b/a=1, \text{ fan que } 2 \Delta 2 = 5. \text{ Estas apli-}$$

cacións bixectivas así definidas permitirían definir isomorfismos entre dous conxuntos se nun deles está definida algunha estrutura. Por exemplo, sexa  $C=(-c, c)$ , sendo  $c$  a velocidade da luz, e  $R$  corpo dos números reais, se definimos  $f(x)=\operatorname{arctanh}(x/c)$ ,  $f:C\rightarrow R$ , dótase a  $C$  de estrutura de grupo abeliano respecto á suma se se define

$$u\Delta v=\operatorname{tanh}(\operatorname{arctanh}(u/c)+\operatorname{arctanh}(v/c)).c=$$

$$\frac{(\operatorname{tanh}(\operatorname{arctanh}(u/c))+\operatorname{tanh}(\operatorname{arctanh}(v/c))).c}{1+\operatorname{tanh}(\operatorname{arctanh}(u/c)).\operatorname{tanh}(\operatorname{arctanh}(v/c))}=\frac{u+v}{1+\frac{u.v}{c^2}}$$

Outro exemplo é o da suma de dúas resistencias en paralelo  $R_1\Delta R_2$ , que vén dada por:

$$\frac{R_1.R_2}{R_1+R_2} \quad \text{que é unha lei } x\Delta y=f^{-1}(f(x)+f(y)) \text{ na que } f(x)=1/x.$$

¿Que pasa se a función é potencia par ou suma de potencias pares?. Tomemos por exemplo

$f(x)=x^2$ ,  $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ ,  $f:[0, \infty)\rightarrow R$  entón  $x\Delta y=\sqrt{x^2+y^2}$  e o elemento simétrico de  $x$  é  $f^{-1}(-f(x))=xi$ , o cal evidentemente non nos serve para definir un grupo aditivo nos números reais positivos.

Definamos agora  $G$ -Grupo, un conxunto  $G$  no que están definidas dúas operacións internas (suma e resta) para as que se cumpren as condicións seguintes  $\forall a,b,c \in G$ :

- 1)  $(a+b)+c=a+(b+c)$
- 2)  $a+(b-c)=(a+b)-c$  ( $G$ -grupo dereita)
- 3)  $(a-b)+c=a-(b-c)$  ( $G$ -grupo centro)
- 4)  $(a-b)-c=a-(b+c)$  ( $G$ -grupo esquerda)
- 5) existe un elemento neutro  $e$  tal que

$$a+e=e+a=a$$

$$6) e-e=e,$$

$$7) \text{ Dado } a, \text{ existe } a' \text{ tal que } a-a'=e=a'-a$$

Prop. Un grupo é un  $G$ -grupo.

Abonda con definir a resta  $a-b=a+(-b)$ , sendo  $(-b)$  o simétrico de  $b$ : a proba é un exercicio.

Prop. Un  $G$ -grupo é un grupo, xa que a operación  $(+)$  é interna, asociativa, ten elemento neutro, e todo elemento  $a$  ten simétrico que vén dado por  $a''=e-a'$ . Agora  $a+a''=a+(e-a')=(a+e)-a'=a-a'=e$ ,  $a''+a=(e-a')+a=e-(a'-a)=e-e=e$ . Postas así as cosas, parece que a definición de  $G$ -grupo non engade nada novo, pero supoñamos que: (definición de  $G1$ -grupo) a propiedade 2) se cumpra sempre que  $b\neq e$ ; a 3) sempre que  $a\neq e, b\neq e$  e a 4) sempre que  $a\neq e$ ; entón está claro

que non podemos demostrar que un  $G1$ -grupo é un grupo, seguindo os pasos da demostración anterior, porque falla a demostración de existencia de elemento simétrico, pero ademais atópase un contraexemplo:

Tomemos agora como  $G=[1, \infty)$  e como suma  $x\Delta y=x+y-1+2\sqrt{(x-1)(y-1)}$ , e como resta  $x-y=x+y-1-2\sqrt{(x-1)(y-1)}$ . En primeiro lugar a suma é unha operación interna, pois  $x>=1, y>=1$ , e a resta tamén, pois isto dedúcese de que a media aritmética de  $x-1$  e  $y-1$  é maior igual que a súa media xeométrica:

$$\frac{(x-1+y-1)}{2} \geq \sqrt{(x-1)(y-1)}$$

é asociativa e conmutativa respecto á suma, posto que está definida segundo  $x\Delta y=f^{-1}(f(x)+f(y))$ , sendo  $f(x)=\sqrt{x-1}$ ,  $f^{-1}(x)=x^2+1$ . Ten elemento neutro, que é o 1, pero o elemento simétrico de  $x$  non se pode calcular como  $f^{-1}(-f(x))$ , que é  $x$  e  $x\Delta x=4x-3$ .

Por outro lado, a resta definiuse  $x-y=f^{-1}(f(x)-f(y))$ , o cal asegura que cumpre 2) (coa excepción comprobable de  $b=e$ , é dicir,  $b=1$ ), 3) (neste caso non se cumpre si  $b=e$  ou  $a=e$ ), 4) (tampouco se cumpre cando  $a=e$ ), 6) constátase substituíndo, e 7) cúmprese porque para  $x, x-x=1$ . Exemplifiquemos en 2 os pasos a seguir para as demostracións de 2),3),4). Queremos probar  $a+(b-c)=(a+b)-c$ ,

$$a+(b-c)=f^{-1}(f(a)+f(f^{-1}(f(b)-f(c))))=f^{-1}(f(a)+(f(b)-f(c)))=$$

$$f^{-1}((f(a)+f(b))-f(c))=f^{-1}(f(f^{-1}(f(a)+f(b))))-f(c)=(a+b)-c.$$

Agora ben, se  $f(1)=0$ , como neste caso, e tal que  $f$  é cuadrática, é dicir converten  $f(f^{-1}(-f(c)))$  en  $f(c)$  e non en  $-f(c)$ , logo  $a+(1-c)=a+c$  e non  $(a+1)-c$ , que é  $a-c$ . Esta é a única excepción, que se podería abreviar dicindo que  $1-c=c$  e non  $-c$ , é a causa da excepción). Así vimos un exemplo de  $G1$ -grupo que non é un grupo:

O conxunto  $G$  anterior.

Se definimos  $G1$ -grupo dereita (respectivamente esquerda, centro) como un conxunto no que están definidas dúas operacións (suma e resta) internas tales que cumpren:

$$1) (a+b)+c=a+(b+c),$$

$$2) a+(b-c)=(a+b)-c \text{ (G1-grupo dereita), } (b\neq e,$$

$a+b \neq e$ ,  
ou ben  $(a-b)+c=a-(b-c)$  (G1-grupo centro)  
 $(a,b \neq e)$ ,

ou ben  $(a-b)-c=a-(b+c)$  (G1-grupo esquerda)  
 $(a \neq e, a-b \neq e)$ ,

3) existe un elemento neutro  $e$  tal que  
 $a+e=e+a=a$ ,

4)  $e-e=e$ ,

5) Dado  $a$ , existe  $a'$  (opoñente) tal que  $a-a'=e=a'-a$

Consecuencias:

1)  $e$  é o único elemento de  $G$  que cumpre  $x+x=x$

:

supoñamos que existe  $a$  tal que  $a+a=a$  e que  $e \neq a$ .

Entonces  $(a+a)-a'=a-a'=e$ ,

$a+(a-a')=a+e=a$ , de onde  $a=e$ .

1-1)  $e$  é o único elemento que cumpre  $x-x=x$ .

2) O opoñente de  $a$  é  $a$ .

3) Para todo elemento  $a$ ,  $a=2a-a'$ ;  $a+a=e+a+(a-a')$   
 $=2a-a'$ , tamén  $a=(a+a')-a$ ,

4) O opoñente de  $a$  é único.

4-1)  $c'=b' \Rightarrow c=b$ ,

4-2)  $c'=e \Rightarrow c=e$ .  $e$  é o opoñente de  $e$ . Como é  
único,

5)  $e$  é único.

6-1) Simplificación pola dereita (suposto G1-  
grupo dereita):

$a+c=b+c \Rightarrow a=b$ . Xa que  $(a+c)-c'=(b+c)-c'$   
 $=a+(c-c')=b+(c-c') \Rightarrow a+e=b+e \Rightarrow a=b$  (se  $c \neq e$ ). Se  
 $c=e$ , de  $a+e=b+e \Rightarrow a=b$ .

6-2) Simplificación pola esquerda (suposto G1-  
grupo centro):

$c-a=c-b \Rightarrow a=b$ . Xa que  $c'-(c-a)=c'-(c-b)=(c'-c)+a$   
 $=c'-(c)+b \Rightarrow e+a=e+b \Rightarrow a=b$  (se  $c \neq e$ ).

6-3) Simplificación pola dereita (suposto G1-  
grupo centro):

$a-c=b-c \Rightarrow a=b$ . Xa que  $(a-c)+c'=a-(c-c')=a-e$   
 $=a-(b-c)+c'=b-(c-c')=$

$b-e=b$  se  $a \neq e$  e  $b \neq e$ .

6-4) Simplificación pola dereita (suposto G1-  
grupo esquerda):

$a-c=b-c \Rightarrow a=b$ . Xa que  $(a-c)+c'=(b-c)+c'=a+(c'-c)$   
 $=b+(c'-c) \Rightarrow a+e=b+e \Rightarrow a=b$  (si  $c \neq e$ ). Se  $c=e$ , de  $a$   
 $=b-e \Rightarrow a=b$ .

6-5) Simplificación pola esquerda (suposto G1-  
grupo dereita):

$c-a=c-b \Rightarrow a=b$ . Xa que  $c'-(c-a)=c'-(c-b)=(c'-c)+a$

$=c'+a=(c'-c)+b \Rightarrow e+a=e+b \Rightarrow a=b$  (si  $c' \neq e$ ).

Etc...

7-1) A ecuación  $x+a=b$  ten solución (G1 grupo  
dereita),

$(x+a)-a'=b-a'=x+(a-a')=x+e=x=b-a'$ ,

7-2) A ecuación  $x-a=b$  ten solución (G1 grupo  
centro),

$(x-a)+a'=b+a'=x-(a-a')=x-e=x$ ,

7-3) A ecuación  $x-a=b$  ten solución (G1 grupo  
centro),

$(x-a)-a'=b-a'=x-(a-a')=x-e=x=b-a'$ ,

7-4) A ecuación  $a-x=b$  ten solución (G1 grupo  
centro),

$a'-(a-x)=a'-b=(a'-a)+x=e+x=x$ , etc.

8) O panorama de G1-grupos está cheo de  
pequenas demostracións, sinxelas, pero delicadas.  
Ademais abren unha morea de interrogantes. ¿Pode  
estenderse un semigrupo a un conxunto no que  
poida resolverse  $x+a=b$ , non só por simetrización,  
senón pasando a un G1-grupo?. ¿É factible estender  
 $N$  cunha resta de modo que forme un G1 grupo?.  
¿Existen G1-grupos que non procedan dunha lei  
cuadrática ou función par?. ¿Existen G1-grupos derei-  
ta e non centro, por exemplo?. Son preguntas para con-  
testar noutro momento.

## BIBLIOGRAFÍA,

[1].ABELLANAS, P. *ELEMENTOS DE MATEMÁTICA*. Teorema de definición por isomorfía. Páx 186-188.

[2].KLINE, MORRIS. *LA PÉRDIDA DE LA CERTIDUMBRE*. Ed. Siglo XXI.

Nota: G vai por Galiza.