



DOS MÁS DOS SON CINCO.

Manuel Díaz Regueiro.

¿Por qué, oh dioses, dos y dos han de ser cuatro? Alexander Pope.

Si a un matemático le dicen que dos más dos son diez, o once, inmediatamente dirá: sí, en base 4 o 3. Pero no está tan claro que sepa responder al hecho de que dos más dos sean cinco. Y sin embargo, podría decir, a pesar del uso común de la frase con significado de absurdo, antinatural, o de falso, que sí, es cierto, y de infinitas maneras. De esto vamos a tratar en las líneas siguientes.

Como primera idea, y siguiendo a Hermann von Helmholtz en su "*Contar y medir*", es muy problemática la aplicación automática de las leyes aritméticas a los fenómenos físicos. Veamos algunos ejemplos: en Química, si uno toma dos volúmenes de hidrógeno y uno de oxígeno se obtienen dos volúmenes de vapor de agua. Un cuarto de alcohol y un cuarto de agua son 1,8 cuartos de mezcla. Tres cucharadas de agua y una cucharada de sal no son cuatro cucharadas. Una gota de agua unida a otra gota no dan lugar a dos gotas. Como señalaba H. Lebesgue, si ponemos un león y un conejo en una jaula no se puede esperar que más tarde haya dos animales en esa jaula.[2].

¿Sobre que convenio podemos afirmar que $2+2=5$? Sobre el que estemos hablando del conjunto de números reales, con estructura de cuerpo, pero no naturalmente del canónico, sino de uno isomorfo a ese en el que los "nombres" están cambiados. Es decir, supongamos, una aplicación biyectiva $f: R \rightarrow R'$, siendo R' exactamente el mismo conjunto que R , pero en el que vamos definir las dos operaciones que le dan estructura de cuerpo, la suma y la multiplicación, del modo siguiente:

$$x \Delta y = f^{-1}(f(x) + f(y)) \quad \text{y} \quad x * y = f^{-1}(f(x) \cdot f(y)).$$

Lo primero que se puede demostrar es que, dado que R es un cuerpo, también lo será R' . Por ejemplo, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma se demuestra:

$$\begin{aligned} x * (y \Delta z) &= f^{-1}(f(x) \cdot f(f^{-1}(f(y) + f(z)))) = f^{-1}(f(x) \cdot (f(y) + f(z))) = \\ &= f^{-1}(f(x) \cdot f(y) + f(x) \cdot f(z)) = f^{-1}(f(f^{-1}(f(x) \cdot f(y))) + f(f^{-1}(f(x) \cdot f(z)))) = x * y \Delta x * z. \end{aligned}$$

Y el elemento neutro de la suma es $f^{-1}(0)$, ya que $x \Delta f^{-1}(0) = f^{-1}(f(x) + f(f^{-1}(0))) = f^{-1}(f(x) + 0) = f^{-1}(f(x)) = x$, lo mismo que $f^{-1}(1)$ es el elemento neutro de la multiplicación, pues $x * f^{-1}(1) = f^{-1}(f(x) \cdot f(f^{-1}(1))) = f^{-1}(f(x) \cdot 1) = f^{-1}(f(x)) = x$.

El elemento simétrico de un elemento x respecto a la suma es $f^{-1}(-f(x))$, pues $x \Delta f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(x) + f(f^{-1}(-f(x)))) = f^{-1}(f(x) - f(x)) = f^{-1}(0)$,

Dado $f(x)$, su simétrico respecto a la multiplicación es $f^{-1}(1/f(x))$, puesto que $x * f^{-1}(1/f(x)) = f^{-1}(f(x) \cdot f(f^{-1}(1/f(x)))) = f^{-1}(f(x) \cdot 1/f(x)) = f^{-1}(1)$.

Las demás propiedades se demuestran de igual forma, y pueden hacerse como ejercicio, o leer [1], donde se da el teorema de definición por isomorfía que dice que: Si R es un sistema algebraico (grupo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc) y M un conjunto, entre los que se estableció una biyección I , es posible definir una estructura algebraica en M de modo que se obtenga un sistema algebraico isomorfo a R . (Y esta definición es la que ya vimos).

Volviendo ahora a la situación original, aplicaciones biyectivas del conjunto R en el cuerpo de los números reales, las más sencillas que se nos puede ocurrir son las $f(x) = ax + b$, de las que se deducen las operaciones

$$x \Delta y = ((ax + b) + (ay + b) - b) / a = x + y + b/a \quad \text{y}$$

$x*y=((ax+b).(ay+b)-b)/a$ las cuales dotan a \mathbb{R} de estructura de cuerpo y, si $b/a=1$, hacen que $2\Delta^2=5$. Estas aplicaciones biyectivas así definidas permitirían definir isomorfismos entre dos conjuntos si en uno de ellos está definida alguna estructura. Por ejemplo, sea $C=(-c, c)$, siendo c la velocidad de la luz, y \mathbb{R} cuerpo de los números reales, si definimos $f(x)=\operatorname{arctanh}(x/c)$, $f:C \rightarrow \mathbb{R}$, se dota a C de estructura de grupo abeliano respecto a la suma si se define

$$u \Delta v = \tanh(\operatorname{arctanh}(u/c) + \operatorname{arctanh}(v/c)).c =$$

$$\frac{(\tanh(\operatorname{arctanh}(u/c)) + \tanh(\operatorname{arctanh}(v/c))).c}{1 + \tanh(\operatorname{arctanh}(u/c)).\tanh(\operatorname{arctanh}(v/c))} = \frac{u + v}{1 + \frac{u.v}{c^2}}$$

Otro ejemplo es el de la suma de dos resistencias en paralelo $R_1 \Delta R_2$, que viene dada por:

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

que es una ley $x \Delta y = f^{-1}(f(x) + f(y))$ en la que $f(x) = 1/x$.

¿Que pasa si la función es potencia par o suma de potencias pares?. Tomemos por ejemplo

$f(x) = x^2$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $f:[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $x \Delta y = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el elemento simétrico de x es $f^{-1}(-f(x)) = xi$, lo cual evidentemente no nos sirve para definir un grupo aditivo en los números reales positivos.

Definamos ahora G-Grupo, un conjunto G en el que están definidas dos operaciones internas (suma y resta) para las que se cumplen las condiciones siguientes $\forall a, b, c \in G$:

- 1) $(a+b)+c = a+(b+c)$
- 2) $a+(b-c) = (a+b)-c$ (G-grupo derecha)
- 3) $(a-b)+c = a-(b-c)$ (G-grupo centro)
- 4) $(a-b)-c = a-(b+c)$ (G-grupo izquierda)
- 5) existe un elemento neutro e tal que

$$a+e=e+a=a$$

$$6) e-e=e,$$

$$7) \text{Dado } a, \text{ existe } a' \text{ tal que } a-a'=e=a'-a$$

Prop. Un grupo es un G-grupo.

Es suficiente con definir la resta $a-b = a+(-b)$, siendo $(-b)$ el simétrico de b : la prueba es un ejercicio.

Prop. Un G-grupo es un grupo, ya que la operación $(+)$ es interna, asociativa, tiene elemento neutro, y todo elemento a tiene simétrico que viene dado por $a' = e - a$. Ahora $a+a' = a+(e-a) = (a+e)-a' = a-a' = e$, $a''+a = (e-a')+a = e-(a'-a) = e-e = e$. Puestas así las cosas,

parece que la definición de G-grupo no añade nada nuevo, pero supongamos que: (definición de G1-grupo) la propiedad 2) se cumpla siempre que $b \neq e$; la 3) siempre que $a \neq e, b \neq e$ y la 4) siempre que $a \neq e$; entonces está claro que no podemos demostrar que un G1-grupo es un grupo, siguiendo los pasos de la demostración anterior, porque falla la demostración de existencia de elemento simétrico, pero además es posible hallar un contraejemplo:

Tomemos ahora como $G = [1, \infty)$ y como suma $x \Delta y = x+y-1+2$, y como resta $x-y = x+y-1-2$

En primer lugar la suma es una operación interna, pues $x \geq 1, y \geq 1$, y la resta también, pues esto se deduce de que la media aritmética de $x-1$ y $y-1$ es mayor igual que su media geométrica:

$$\frac{(x-1+y-1)}{2} \geq \sqrt{(x-1)(y-1)}$$

es asociativa y conmutativa respecto a la suma, puesto que está definida según $x \Delta y = f^{-1}(f(x) + f(y))$, siendo $f(x) = \sqrt{x-1}$, $f^{-1}(x) = x^2 + 1$. Tiene elemento neutro, que es el 1, pero el elemento simétrico de x no se puede calcular como $f^{-1}(-f(x))$, que es x y $x \Delta x = 4x - 3$.

Por otro lado, la resta se definió $x-y = f^{-1}(f(x) - f(y))$, lo cual asegura que cumple 2) (con la excepción comprobable de $b=e$, es decir, $b=1$), 3) (en este caso no se cumple si $b=e$ o $a=e$), 4) (tampoco se cumple cuando $a=e$), 6) se constata substituyendo, y 7) se cumple porque para x , $x-x=1$. Ejemplifiquemos en 2 los pasos a seguir para las demostraciones de 2), 3), 4). Queremos probar $a+(b-c) = (a+b)-c$:

$$a + (b - c) = f^{-1}(f(a) + f(f^{-1}(f(b) - f(c)))) = f^{-1}(f(a) + (f(b) - f(c))) = f^{-1}((f(a) + f(b)) - f(c)) = f^{-1}(f(f^{-1}(f(a) + f(b)))) - f(c) = (a + b) - c.$$

Ahora bien, si $f(1) = 0$, como en este caso, y tal que f es cuadrática, es decir convierte $f(f^{-1}(-f(c)))$ en $f(c)$ y no en $-f(c)$, luego $a+(1-c) = a+c$ y no $(a+1)-c$, que es $a-c$. Esta es la única excepción, que se podría abreviar diciendo que $1-c=c$ y no $-c$, es la causa de la excepción). Así vimos un ejemplo de G1-grupo que no es un grupo:

El conjunto G anterior.

Si definimos G1-grupo derecha (respectivamente izquierda, centro) como un conjunto en el que están definidas dos operaciones (suma y resta) internas tales

que cumplen:

1) $(a+b)+c=a+(b+c)$,

2) $a+(b-c)=(a+b)-c$ (G1-grupo derecha), ($b \neq e$, $a+b \neq e$),

o bien $(a-b)+c=a-(b-c)$ (G1-grupo centro) ($a, b \neq e$),

o bien $(a-b)-c=a-(b+c)$ (G1-grupo izquierda) ($a \neq e$, $a-b \neq e$),

3) existe un elemento neutro e tal que $a+e=e+a=a$,

4) $e-e=e$,

5) Dado a , existe a' (oponente) tal que $a-a'=e=a'-a$

Consecuencias:

1) e es el único elemento de G que cumple $x+x=x$:

supongamos que existe a tal que $a+a=a$ y que $e \neq a$. Entonces $(a+a)-a'=a-a'=e$,

$a+(a-a')=a+e=a$, de donde $a=e$.

1-1) e es el único elemento que cumple $x-x=x$.

2) El oponente de a' es a .

3) Para todo elemento a , $a=2a-a'$; $a+a=e=a+(a-a')=2a-a'$, también $a=(a+a)-a'$,

4) El oponente de a es único.

4-1) $c'=b' \Rightarrow c=b$,

4-2) $c'=e \Rightarrow c=e$. e es el oponente de e . Como es único,

5) e es único.

6-1) Simplificación por la derecha (supuesto G1-grupo derecha):,

$a+c=b+c \Rightarrow a=b$. Ya que $(a+c)-c'=(b+c)-c'=a+(c-c')=b+(c-c') \Rightarrow a+e=b+e \Rightarrow a=b$ (se $c \neq e$). Si $c=e$, de $a+e=b+e \Rightarrow a=b$.

6-2) Simplificación por la izquierda (supuesto G1-grupo centro):

$c-a=c-b \Rightarrow a=b$. Xa que $c'-(c-a)=c'-(c-b)=(c'-c)+a=(c'-c)+b \Rightarrow e+a=e+b \Rightarrow a=b$ (se $c \neq e$).

6-3) Simplificación por la derecha (supuesto G1-grupo centro):

$a-c=b-c \Rightarrow a=b$. Xa que $(a-c)+c'=a-(c-c')=a-e=a-(b-c)+c'=b-(c-c')=$

$b-e=b$ si $a \neq e$ y $b \neq e$.

6-4) Simplificación por la derecha (supuesto G1-grupo izquierda):

$a-c=b-c \Rightarrow a=b$. Ya que $(a-c)+c'=(b-c)+c'=a+(c'-c)=b+(c'-c) \Rightarrow a+e=b+e \Rightarrow a=b$ (si $c \neq e$). Si $c=e$, de $a-e=b-e \Rightarrow a=b$.

6-5) Simplificación por la izquierda (supuesto G1-grupo derecha):

$c-a=c-b \Rightarrow a=b$. Ya que $c'-(c-a)=c'-(c-b)=(c'-c)+a=(c'-c)+b \Rightarrow e+a=e+b \Rightarrow a=b$ (si $c \neq e$).

Etc...

7-1) La ecuación $x+a=b$ tiene solución (G1 grupo derecha),

$(x+a)-a'=b-a'=x+(a-a')=x+e=x=b-a'$,

7-2) La ecuación $x-a=b$ tiene solución (G1 grupo centro),

$(x-a)+a'=b+a'=x-(a-a')=x-e=x$,

7-3) La ecuación $x-a=b$ tiene solución (G1 grupo centro),

$(x-a)-a'=b-a'=x-(a-a')=x-e=x=b-a'$,

7-4) La ecuación $a-x=b$ tiene solución (G1 grupo centro),

$a'-(a-x)=a'-b=(a'-a)+x=e+x=x$, etc.

8) El panorama de G1-grupos está lleno de pequeñas demostraciones, sencillas, pero delicadas. Además abren un montón de interrogantes. ¿Puede extenderse un semigrupo a un conjunto en el que se pueda resolver $x+a=b$, no sólo por simetrización, sino pasando a un G1-grupo?. ¿Es factible extender N con una resta de modo que forme un G1 grupo?. ¿Existen G1-grupos que no procedan de una ley cuadrática o función par?. ¿Existen G1-grupos derecha y no centro, por ejemplo?. Son preguntas para contestar en otro momento.

BIBLIOGRAFÍA,

[1].ABELLANAS, P. *ELEMENTOS DE MATEMÁTICA*. Teorema de definición por isomorfía. Pág 186-188. Madrid.

[2].KLINE, MORRIS. *LA PÉRDIDA DE LA CERTIDUMBRE*. Ed. Siglo XXI. Madrid. 1985.

Nota: G va por Galiza.