Suma de distancias al cuadrado.

Jesús Calvo Rovira y Manuel Díaz Regueiro. IES Xoán Montes.

Dados 2 conjuntos de *l* y *m* puntos de R^n ,$\{A_i\}$ e $\{B_i\}$, *si la suma de los cuadrados de las distancias desde cualquier punto de* R^n *a los puntos de cada conjunto es la misma, los dos conjuntos de puntos tienen el mismo baricentro.*

Sea O el baricentro del primer conjunto y P un punto arbitrario de R^n. PO=v , $OA_i=v_i$, $OB_i=w_i$

$$i)\sum \overline{PA_i}^2 = \sum \|v-v_i\|^2 = \sum v^2 - 2v\sum v_i + \sum v_i^2$$

$$ii)\sum \overline{PB_i}^2 = \sum \|v-w_i\|^2 = \sum v^2 - 2v\sum w_i + \sum w_i^2$$

$\sum v_i = 0$ por definición de baricentro (suponiendo que O es el origen de coordenadas)

Si i) = ii) para todo v, tomando v=0, $\sum v_i^2 = \sum w_i^2$, y por lo tanto al ser cierto para todo valor de v $\sum w_j = 0$, es decir O es también el baricentro de los B_i.

Poniendo + en vez de - en las fórmulas i) y ii) nos daría otra propiedad algo distinta-si al trasladar los dos conjuntos de puntos con un vector arbitrario v la suma de los módulos al cuadrado de los vectores resultantes coincide entonces los dos conjuntos de puntos tiene el mismo baricentro, y la suma de los módulos al cuadrado de los dos conjuntos de vectores ya coincidía.

Al girar un ángulo arbitrario *m* puntos alrededor de su baricentro resulta que los nuevos puntos obtenidos cumplen que la suma de los cuadrados de las distancias a cualquier punto de R^n es la misma que la de los puntos originales, ya que se conservan en un giro de centro O (son la suma de los módulos al cuadrado y-obvio- el baricentro de los dos conjuntos de puntos sigue coincidiendo).

En particular, podemos afirmar que, dados *m* puntos en R^n, la diferencia de la suma de distancias al cuadrado de cualquier punto de R^n a *m* puntos del mismo y a el mismo conjunto de puntos transformado por un giro respecto a su baricentro es cero.

Aún más en particular, si los puntos forman un polígono, poliedro o politopo regular de R^n, la suma de distancias al cadrado desde cualquier punto P restada a la suma de distancias al cuadrado desde el mismo punto a un poliedro ou politopo regular girado del anterior respecto al mismo centro es cero. En el caso de que el poliedro o politopo regular de R^n tenga *n* simetrías respecto a los *n* ejes de coordenadas, entonces la igualdad se cumple si escogemos como primer conjunto de puntos la mitad de los puntos (los pares, por ejemplo) y como el otro conjunto sus simétricos respecto al centro del politopo, por estar en el caso de un giro de ángulo 180º.

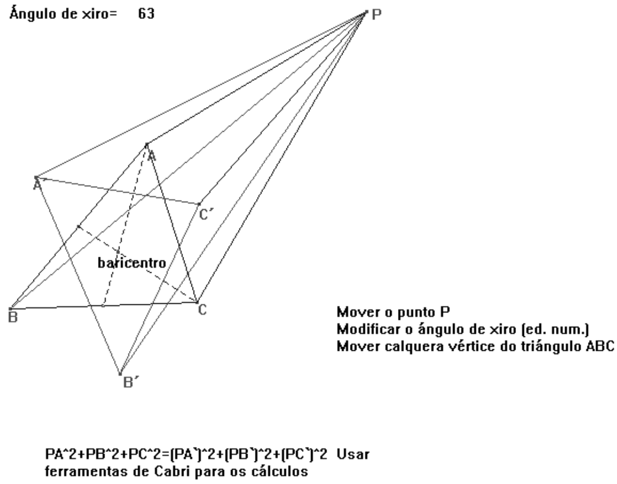
En particular, si *m*=2 , las diagonales son iguales y se cortan en el punto medio (baricentro de cada par de puntos), los 4 puntos forman un rectángulo.

Para que cumplan la condición 4 y 4 puntos e el espacio tridimensional, no es necesario que formen un paralelepípedo recto. Al girar cualquier cuerpo alrededor de su baricentro la nueva figura obtenida cumple la condición de que la suma......, independientemente de que sea un sólido regular o no.

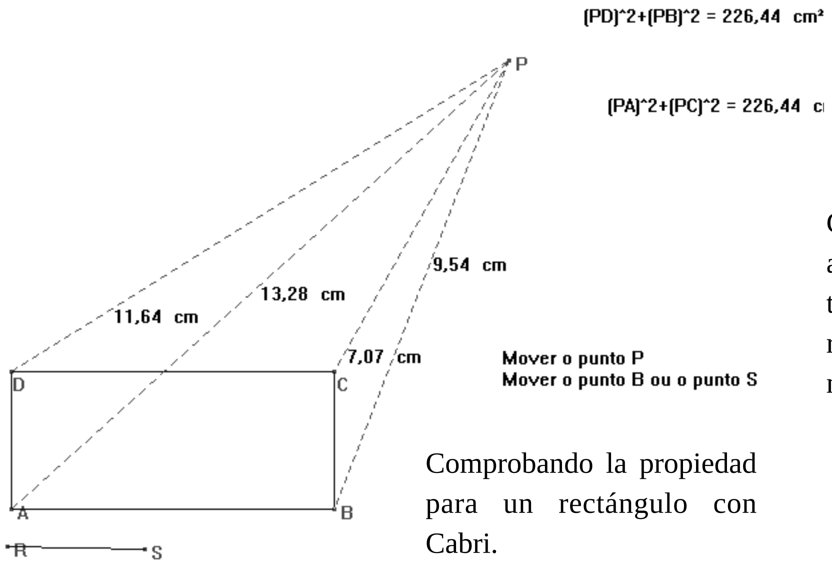
Por lo visto anteriormente, el rectángulo es el único caso de *m* puntos de R^n en los que se cumple que la suma de distancias al cadrado a puntos alternados (*m*/2) coincide si y solo si.

Bien, esto visto desde el punto de vista formal. En realidad, este texto es el resumen de las experiencias y discusiones que los autores tuvimos fundamentalmente con Cabri, y donde los resultados están puestos al revés. En primer lugar obtuvimos y discutimos que un hexágono regular y un hexágono regular girado tenían la propiedad. Después llegamos a ver que era suficiente con que fuese un triángulo equilátero y el mismo triángulo girado respecto al centro. Luego, como se puede ver en la figura, utilizamos Cabri para comprobar que, en realidad con cualquier otro triángulo y más un triángulo girado del anterior se cumple la propiedad. Y seguimos investigando con otras situaciones.

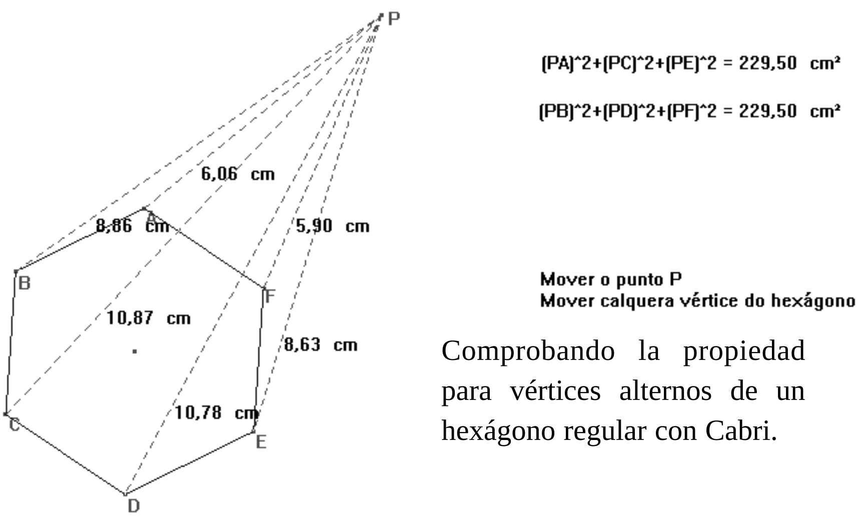
Partiendo, por lo tanto, de *Esferas e medias* de GAMMA nº 1, llegamos a vislumbrar una serie de nuevas propiedades, fundamentalmente en el plano, pero que, desde luego, es más satifactorio comprobar que se cumplen utilizando una herramienta como el Cabri, que se puede usar y la usamos con alumnos de primer de la ESO. Y, como cuenta Miguel de Guzmán en el libro que se reseña en este número de GAMMA, experimentando.



Comprobando que un triángulo y otro girado del anterior respecto al baricentro común cumple la propiedad.



Comprobando la propiedad para un rectángulo con Cabri.



Comprobando la propiedad para vértices alternos de un hexágono regular con Cabri.