

PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y POLINOMIOS DE BERNOULLI Y EULER

Manuel Díaz Regueiro, IES Xoán Montes de Lugo

RESUMEN

Se generalizan propiedades de los polinomios de Bernoulli y Euler a progresiones aritméticas. Se estudian los momentos centrales de las progresiones aritméticas en función de estos polinomios y se aplican a casos particulares de ajuste de mínimos cuadrados.

Momentos de una progresión aritmética.

Dados n números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, en progresión aritmética de diferencia d , es decir, $x_i = x_1 + (i-1)d$, entonces la media de los números $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{x_1 + x_n}{2}$ es la media de los extremos de la progresión.

Ahora ya que $x_i - \bar{x} = x_1 + (i-1)d - x_1 - \frac{(n-1)d}{2} = (i - \frac{n+1}{2})d$ la varianza

$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (i - \frac{n+1}{2})^2 \frac{d^2}{n} = \sigma_{x_1, x_n}^2 - (n-1)(n-2) \frac{d^2}{6}$ es igual a la varianza de los extremos menos $(n-1)(n-2) \frac{d^2}{6}$.

También es igual a $\sigma^2 = \frac{(n^2 - 1)d^2}{12}$ como se comprueba al desarrollar σ^2 , teniendo en

cuenta que $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ y que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$. Para n grande $\sigma = \frac{nd}{2\sqrt{3}}$.

De aquí, $a_2 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n} = \bar{x}^2 + \frac{(n^2 - 1)d^2}{12}$

$m_3 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^3}{n} = 0$. m_3 , al igual que todos los momentos centrales de orden impar son 0,

porque por cada $x_i - \bar{x}$ positivo hay otro negativo de igual valor absoluto.

$$a_3 = 3a_2\bar{x} - 2\bar{x}^3 = \bar{x}^3 + \frac{\bar{x}(n^2 - 1)d^2}{4}$$

$$m_4 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^4}{n} = \sum_{i=1}^n (i - \frac{n+1}{2})^4 \frac{d^4}{n} = \frac{(3n^4 - 10n^2 + 7)d^4}{240} \text{ y}$$

$$a_4 = \bar{x}^4 + \frac{\bar{x}^2(n^2 - 1)d^2}{2} + \frac{(3n^4 - 10n^2 + 7)d^4}{240}$$

En general, $m_{2p+1} = 0$ y $m_{2p} = Q(n)d^{2p}$ siendo $Q(n)$ un polinomio de grado $2p$.

Para obtener las fórmulas generales utilizaré:

Polinomios de Bernuilli

Las propiedades de los polinomios de Bernuilli que se van a utilizar son:

$$[1] \sum_{i=1}^n i^k = \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}}{k+1}$$

$$[2] \int_0^{n+1} B_{k+1}(x) dx = \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}}{k+1}$$

$$[3] B_k(x+h) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i(x) h^{k-i}$$

$$[4] B_{k+1}(-h) = (-1)^{k+1} B_{k+1}(h) + (-1)^{k+1} (k+1) h^k$$

Momentos centrales de una progresión aritmética

Calculamos

$$m_k = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^k}{n} = \sum_{i=1}^n \left(i - \left(\frac{n+1}{2}\right)\right)^k \frac{d^k}{n} \text{ para lo que, previamente, hallamos:}$$

$$\sum_{i=1}^n (i-h)^k = \sum_{i=1}^n \left(i^k - \binom{k}{1} i^{k-1} h + \binom{k}{2} i^{k-2} h^2 - \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} i h^{k-1} + (-1)^k h^k \right) =$$

$$\frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}}{k+1} - \binom{k}{1} \frac{B_k(n+1) - B_k}{k} h + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} \frac{B_2(n+1) - B_2}{2} h^{k-1} + n(-1)^k h^k$$

utilizando [1]. El último sumando puede expresarse

$$(n+1)(-1)^k h^k - (-1)^k h^k = (-1)^k (B_1(n+1) - B_1) h^k - (-1)^k h^k. \text{ Es decir, por [2]}$$

$$\sum_{i=1}^n (i-h)^k = \int_0^{n+1} \left(B_k(x) - \binom{k}{1} B_{k-1}(x) h + \dots + (-1)^k B_0(x) h^k \right) dx - (-1)^k h^k = \text{por [3]}$$

$$\int_0^{n+1} B_{k+1}(x-h) dx - (-1)^k h^k = \frac{B_{k+1}(n+1-h) - B_{k+1}(-h)}{k+1} + (-1)^{k+1} h^k = \text{por [4]}$$

$$\frac{B_{k+1}(n+1-h) + (-1)^{k+2} B_{k+1}(h) + (-1)^{k+2} (k+1) h^k}{k+1} + (-1)^{k+1} h^k =$$

$$\frac{B_{k+1}(n+1-h) + (-1)^{k+2} B_{k+1}(h)}{k+1}$$

$$\text{en el caso de } m_k, h = \frac{n+1}{2} \text{ y } m_k = \frac{B_{k+1}\left(\frac{n+1}{2}\right) + (-1)^{k+2} B_{k+1}\left(\frac{n+1}{2}\right) d^k}{k+1} \frac{d^k}{n}$$

$$\text{es decir, } m_k = 0 \text{ (si } k \text{ es impar) y } m_k = \frac{2B_{k+1}\left(\frac{n+1}{2}\right) d^k}{n(k+1)} \text{ si } k \text{ es par.}$$

Momentos respecto al origen y suma de potencias

$$a_k = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^k}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{((x_i - \bar{x}) + \bar{x})^k}{n} = \bar{x}^k + \binom{k}{1} m_1 \bar{x}^{k-1} + \dots + m_k = \bar{x}^k + \binom{k}{2} m_2 \bar{x}^{k-2} + \dots + m_k =$$

$$\bar{x}^k + \binom{k}{2} \frac{2B_3 \left(\frac{n+1}{2}\right) d^2}{3n} \bar{x}^{k-2} + \dots + m_k, \text{ donde } m_k = 0 \text{ (si } k \text{ es impar) y } m_k = \frac{2B_{k+1} \left(\frac{n+1}{2}\right) d^k}{n(k+1)}$$

si k es par.

Y $s_k = na_k$ siendo s_k la suma de potencias k de los términos de la progresión.

Es posible generalizar la fórmula [1] para s_k .

$$s_k = \sum_{i=1}^n x_i^k = \sum_{i=1}^n (x_1 + (i-1)d)^k = \sum_{i=1}^n (x_1^k + \binom{k}{1} x_1^{k-1} (i-1)d + \dots + (i-1)^k d^k) =$$

$$nx_1^k + \binom{k}{1} x_1^{k-1} d \frac{(B_2(n) - B_2)}{2} + \dots + d^k \frac{(B_{k+1}(n) - B_{k+1})}{k+1}.$$

Como $n = B_1(n) - B_1$

$$s_k = \int_0^n (B_0 x_1^k + B_1(x) x_1^{k-1} \binom{k}{1} d + \dots + B_k(x) d^k) dx =$$

$$d^k \int_0^n (B_0 \left(\frac{x_1}{d}\right)^k + B_1(x) \binom{k}{1} \left(\frac{x_1}{d}\right)^{k-1} + \dots + B_k(x)) dx =$$

$$d^k \int_0^n B_k \left(x + \frac{x_1}{d}\right) dx = \left(\frac{B_{k+1} \left(n + \frac{x_1}{d}\right) - B_{k+1} \left(\frac{x_1}{d}\right)}{k+1} \right) d^k = \left(\frac{B_{k+1} \left(\frac{x_{n+1}}{d}\right) - B_{k+1} \left(\frac{x_1}{d}\right)}{k+1} \right) d^k$$

Otras fórmulas

Los polinomios de Euler tienen fórmulas en cierta manera semejantes a los de Bernoulli. Así, puesto que:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} i^k = \frac{E_k(n+1) + (-1)^n E_k(0)}{2} \text{ la misma suma para una progresión aritmética general}$$

es:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (x_1 + (i-1)d)^k = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (x_1^k + \binom{k}{1} (i-1)d^{k-1} + \dots + (i-1)^k d^k) =$$

$$\frac{x_1^k + (-1)^{n-1} x_1^k}{2} + \binom{k}{1} x_1^k d \left(\frac{E_1(n) + (-1)^{n-1} E_1(0)}{2} \right) + \dots + d^k \left(\frac{E_k(n) + (-1)^{n-1} E_k(0)}{2} \right) =$$

$$\frac{d^k}{2} \left(\left(E_0 \left(\frac{x_1}{d}\right)^k + \dots + E_k(n) \right) + (-1)^{n-1} \left(E_0 \left(\frac{x_1}{d}\right)^k + \dots + E_k(0) \right) \right) =$$

$$d^k \frac{\left(E_k \left(n + \frac{x_1}{d}\right) + (-1)^{n-1} E_k \left(\frac{x_1}{d}\right) \right)}{2} = d^k \frac{\left(E_k \left(\frac{x_{n+1}}{d}\right) + (-1)^{n-1} E_k \left(\frac{x_1}{d}\right) \right)}{2}$$

En el caso particular $x_1 = 1 - h$, $d=1$,

$$\sum_{i=1}^n (i-h)^k = \frac{E_k(n+1-h) + (-1)^{n-1} E_k(1-h)}{2} = \frac{E_k(n+1-h) + (-1)^{n+k-1} E_k(h)}{2}$$

Ahora, para

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (x_i - \bar{x})^k = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \left(i - \left(\frac{n+1}{2} \right) \right)^k d^k = \frac{E_k\left(\frac{n+1}{2}\right) + (-1)^{n+k-1} E_k\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2} = E_k\left(\frac{n+1}{2}\right) d^k \text{ si } n+k \text{ es impar y } 0 \text{ si } n+k \text{ es par.}$$

Aplicación al ajuste mínimo cuadrático

En numerosos casos de ajuste mínimo cuadrático de un polinomio será posible elegir los valores de x de tal manera que estén en progresión aritmética.

Si el polinomio es de grado m , al calcular los coeficientes que hacen mínimo

$$\sum_{i=1}^n (y_i - P(x_i))^2 \text{ se obtienen } m+1 \text{ ecuaciones lineales con } m+1 \text{ incógnitas cuyos coeficientes}$$

son las sumas s_k , expresable en función de x_1 , n y d .

Si el polinomio a calcular se escribe $y = a_0 + a_1(x - \bar{x}) + \dots + a_m(x - \bar{x})^m$, los coeficientes del sistema de ecuaciones resultante serán los momentos m_k , por lo que la mitad de los

coeficientes serán cero y los restantes formulados en función de n y d .

Ejemplo 1. Ajuste de una recta.

Derivando $Q = \sum_{i=1}^n (y_i - (a + b(x_i - \bar{x})))^2$ respecto a a y b e igualando a cero, resulta,

$$\sum_{i=1}^n y_i = na + b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = na$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i = a \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) + b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{b2}{3} B_3\left(\frac{n+1}{2}\right) d^2$$

$$\text{La recta es } y = \bar{y} + \frac{12\bar{y}_1(x - \bar{x})}{(n^2 - 1)d^2}, \text{ simbolizando por } \bar{y}_k = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k y_i}{n}$$

Ejemplo2. Ajuste de una parábola, $y = a + b(x - \bar{x}) + c(x - \bar{x})^2$

El sistema de ecuaciones es:

$$\bar{y} = a + cm_2$$

$$\bar{y}_1 = bm_2$$

$$\bar{y}_2 = am_2 + cm_4, \text{ de donde, } a = \frac{m_4\bar{y} - m_2\bar{y}_2}{m_4 - m_2^2}, b = \frac{\bar{y}_1}{m_2}, c = \frac{y_2 - m_2\bar{y}}{m_4 - m_2^2}, \text{ y, como sabemos,}$$

$$m_2 = \frac{(n^2 - 1)d^2}{12} \text{ y } m_4 = \frac{(3n^4 - 10n^2 + 7)d^4}{240}$$

Otras propiedades

Sea p un número real. Entonces $\frac{te^{xt}}{e^{pt} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{t^n}{n!}$ donde $A_n(x) = p^{n-1} B_n\left(\frac{x}{p}\right)$

y $B_n(x)$ son los polinomios de Bernoulli.

Si $\frac{pte^{ypt}}{e^{pt} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(y) \frac{p^n t^n}{n!}$ entonces $\frac{te^{ypt}}{e^{pt} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(y) \frac{p^{n-1} t^n}{n!}$ y

haciendo $y=x/p$ obtenemos el resultado.

Así 1) $A_n(x+p) = A_n(x) + nx^{n-1}$

$$A_n(x+p) = p^{n-1} B_n\left(\frac{x+p}{p}\right) = p^{n-1} B_n\left(\frac{x}{p} + 1\right) = p^{n-1} \left(B_n\left(\frac{x}{p}\right) + n\left(\frac{x}{p}\right)^{n-1} \right)$$

$$2) A_n'(x) = nA_{n-1}(x)$$

$$A_n'(x) = p^{n-1} B_n'\left(\frac{x}{p}\right) \frac{1}{p} = p^{n-2} B_{n-1}'\left(\frac{x}{p}\right) n = nA_{n-1}(x)$$

$$3) A_n(p-x) = (-1)^n A_n(x)$$

$$A_n(p-x) = p^{n-1} B_n\left(\frac{p-x}{p}\right) = p^{n-1} B_n\left(1 - \frac{x}{p}\right) = p^{n-1} B_n\left(\frac{x}{p}\right) (-1)^n = (-1)^n A_n(x)$$

$$4) A_n(x+ph) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_k(x) (ph)^{n-k}$$

5) Sea x_r una progresión aritmética de diferencia p ,

$$\sum_{s=1}^r (x_s)^{n-1} = \frac{A_n(x_{r+1}) - A_n(x_1)}{n}$$

Tenemos

$$A_n(x_{r+1}) = A_n(x_r + p) = A_n(x_r) + nx_r^{n-1}$$

$$A_n(x_r) = A_n(x_{r-1} + p) = A_n(x_{r-1}) + nx_{r-1}^{n-1}$$

.....

$$A_n(x_2) = A_n(x_1 + p) = A_n(x_1) + nx_1^{n-1}$$

Sumando todas las igualdades,

$$A_n(x_{r+1}) = A_n(x_1) + n \sum_{s=1}^r x_s^{n-1}$$

$$6) \int_a^x A_n(t) dt = \frac{A_{n+1}(x) - A_{n+1}(a)}{n+1}$$

$$7) A_n(px) = p^{n-1} B_n(x), \text{ etc.}$$

También $\frac{2e^{xt}}{e^{pt} + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(x) \frac{t^n}{n!}$ donde $D_n(x) = p^{n-1} E_n\left(\frac{x}{p}\right)$ y los $E_n(x)$

son los polinomios de Euler.

Así 1) $D_n(x+p) + D_n(x) = 2x^n$

2) $D_n'(x) = nD_{n-1}(x)$

3) $D_n(p-x) = (-1)^n D_n(x)$

4) $D_n(x+ph) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k(x)(ph)^{n-k}$

5) Sea x_r una progresión aritmética de diferencia p ,

$$\sum_{s=1}^r (x_r)^{n-1} (-1)^{n-s} = \frac{D_n(x_{r+1}) - D_n(x_1)(-1)^r}{2}$$

6) $\int_a^x D_n(t) dt = \frac{D_{n+1}(x) - D_{n+1}(a)}{n+1}$

7) $D_n(px) = p^{n-1} E_n(x)$, etc.

Momentos centrales de una progresión aritmética y ajuste.

Si queremos hacer un ajuste parabólico por el método de mínimos cuadrados y los valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, están en progresión aritmética, entonces los parámetros de

$$y = a_0 + a_1(x - \bar{x}) + a_2(x - \bar{x})^2 + \dots + a_n(x - \bar{x})^n$$

pueden calcularse en función de los momentos centrales (antes calculados) y de las medias

ponderadas $\bar{y}_k = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k y_i}{n}$.

BIBLIOGRAFÍA

Abramowitz and Stegun. Handbook of mathematical functions. *Dover*.

Gradshteyn-Ryzhik. Table of integrals, series and products. *Academic Press*.

G. Calot. Curso de estadística descriptiva. *Paraninfo*.